Группа 2ИСиП-23

Дисциплина: Математика

Дата: 18.03.24

**Тема:** **Решение комбинаторных задач**

**Тип занятия:** практическое занятие

**Литература:**

1. Параграф 60-63 страницы 317-330 Учебник «Алгебра и начала математического анализа», под редакцией Ш.А. Алимов, Москва, «Просвещение», 2016 г, 10-11 класс

(Литература находится внизу на странице дистанционного обучения в скачанных учебниках или источниках)

1. Составить краткий конспект лекции, законспектировать решенные примеры. Применять при решении задач понятие комбинаторики. Решать задачи на число способов выбора. Уравнения и неравенства в комбинаторике.

(Практическое занятие прилагается).

**Основные вопросы:**

**(ответьте письменно):**

1. Запишите формулу для вычисления числа сочетаний из n элементов по m.
2. Запишите формулу для вычисления числа размещений из n элементов по m.
3. Запишите формулу для вычисления числа перестановок из n элементов.
4. Запишите формулу бинома Ньютона.
5. Составьте треугольник Паскаля.
6. Запишите правило сложения элементов.
7. Запишите правило умножения элементов.

**Выполнить (задания для самостоятельной работы по вариантам)**

**Тема:** Решение комбинаторных задач

**Тип занятия:** практическое занятие

**Цель**: уметьприменять формулы комбинаторики: размещения, сочетания, перестановки, правила сложения и умножения. Использовать при решении задач треугольник Паскаля и бином Ньютона.

**Оборудование:** ручка, методические рекомендации по выполнению работы.

**Методические рекомендации по выполнению практической работы:**

**Задание №1**.

Сколькими способами можно:

а) отобрать три различного цвета карандаша из 10 разноцветных карандашей, лежащих в коробке;

б) составить расписание различных занятий на пятницу из 8 предметов по 4 пары;

в) расставить на полке 7 книг, среди которых есть трехтомник А.С. Пушкина;

г) отбирать 3 мальчиков и 7 девочек для участия в конкурсе из группы в 25 человек, среди которых 10 мальчиков и 15 девочек.

Решение:

а) По условию задачи в коробке имеется 10 разноцветных карандашей, то есть n=10, из которых отбирают три любых карандаша, то есть m=3, так как порядок следования карандашей не важен, то будем использовать формулу сочетаний:

$$C\_{n}^{m}=\frac{n!}{m!∙\left(n-m\right)!}$$

Найдем искомое число способов:

$C\_{10}^{3}=\frac{10!}{3!∙\left(10-3\right)!}=\frac{10!}{3!∙7!}=\frac{8∙9∙10}{3!}=\frac{8∙9∙10}{1∙2∙3}=4∙3∙10=120$.

Ответ: 120.

б) По условию задачи в коробке имеется 8 учебных предметов, то есть n=8, расписание пятницы состоит из четырех пар, то есть m=4. В данном случае при составлении расписания порядок следования элементов в подмножестве важен, что означает использование формулы размещений:

$$A\_{n}^{m}=\frac{n!}{\left(n-m\right)!}$$

Найдем искомое число способов составления расписания:

$$A\_{8}^{4}=\frac{8!}{\left(8-4\right)!}=\frac{8!}{4!}=5∙6∙7∙8=1680$$

Ответ: 1680.

в) так три тома, входящие в трехтомник, должны стоять рядом, причем по возрастанию номера тома слева направо, рассматриваем их как один элемент данного множества, в котором имеется еще $7-3=4$ элемента, поэтому выбираем перестановки во множестве, содержащим 5 элементов, то есть n=5.

$$P\_{n}=n!$$

$$P\_{5}=5!=1∙2∙3∙4∙5=120$$

Ответ: 120.

г) так как при отборе мальчиков и девочек не учитывается их порядок следования в подгруппах, то для вычислений воспользуемся формулой сочетаний, с другой стороны, так как выбирается 3 мальчика **и** 7 девочек, то необходимо воспользоваться правилом умножения:

$$C\_{10}^{3}∙C\_{15}^{7}=\frac{10!}{3!∙\left(10-3\right)!}∙\frac{15!}{7!∙\left(15-7\right)!}=\frac{10!}{3!∙7!}∙\frac{15!}{7!∙8!}=$$

$$=\frac{8∙9∙10}{3!}∙\frac{9∙10∙11∙12∙13∙14∙15}{7!}=$$

$$=\frac{8∙9∙10}{1∙2∙3}∙\frac{9∙10∙11∙12∙13∙14∙15}{1∙2∙3∙4∙5∙6∙7}=4∙3∙10∙3∙11∙3∙13∙5=772200$$

Ответ: $772200$.

**Задание №2.**

Разложить по степеням:

а) $\left(2+a\right)^{7}$;

б) $\left(a-2b\right)^{6}$;

в) $\left(1-\sqrt{3}\right)^{5}$;

г) $\left(3-i\right)^{8}$.

Решение:

а) $\left(2+a\right)^{7}$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\left(2+a\right)^{7}=C\_{7}^{0}∙2^{7-0}∙a^{0}+C\_{7}^{1}∙2^{7-1}∙a^{1}+C\_{7}^{2}∙2^{7-2}∙a^{2}+C\_{7}^{3}∙2^{7-3}∙a^{3}+$$

$+C\_{7}^{4}∙2^{7-4}∙a^{4}+C\_{7}^{5}∙2^{7-5}∙a^{5}+C\_{7}^{6}∙2^{7-6}∙a^{6}+C\_{7}^{7}∙2^{7-7}∙a^{7}$*.*

Для подсчета числа сочетаний воспользуемся треугольником Паскаля, а именно его восьмой строчкой, состоящей из чисел:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |
| $$C\_{7}^{0}$$ | $$C\_{7}^{1}$$ | $$C\_{7}^{2}$$ | $$C\_{7}^{3}$$ | $$C\_{7}^{4}$$ | $$C\_{7}^{5}$$ | $$C\_{7}^{6}$$ | $$C\_{7}^{7}$$ |

Таким образом, получим наше разложение:

$$\left(2+a\right)^{7}=1∙2^{7-0}∙a^{0}+7∙2^{7-1}∙a^{1}+21∙2^{7-2}∙a^{2}+35∙2^{7-3}∙a^{3}+$$

$$+35∙2^{7-4}∙a^{4}+21∙2^{7-5}∙a^{5}+7∙2^{7-6}∙a^{6}+1∙2^{7-7}∙a^{7}=$$

=$1∙2^{7}∙1+7∙2^{6}∙a^{1}+21∙2^{5}∙a^{2}+35∙2^{4}∙a^{3}+35∙2^{3}∙a^{4}+21∙2^{2}∙a^{5}+$

$$+7∙2^{1}∙a^{6}+1∙2^{0}∙a^{7}=2^{7}+7∙2^{6}∙a+21∙2^{5}∙a^{2}+35∙2^{4}∙a^{3}+$$

$$+35∙2^{3}∙a^{4}+21∙2^{2}∙a^{5}+7∙2∙a^{6}+1∙1∙a^{7}=128+7∙64a+21∙32a^{2}+$$

$$+35∙16a^{3}+35·8a^{4}+21·4a^{5}+14a^{6}+a^{7}=128+448a+672a^{2}+560a^{3}+$$

$+280a^{4}+84a^{5}+14a^{6}+a^{7}$.

Получили разложение:

$\left(2+a\right)^{7}=128+448a+672a^{2}+560a^{3}+280a^{4}+84a^{5}+14a^{6}+a^{7}$.

б) необходимо теперь разложить $\left(a-2b\right)^{6}$.

Аналогично получаем:

$$\left(a-2b\right)^{6}=C\_{6}^{0}∙a^{6-0}∙\left(-2b\right)^{0}+C\_{6}^{1}∙a^{6-1}∙\left(-2b\right)^{1}+C\_{6}^{2}∙a^{6-2}∙\left(-2b\right)^{2}+$$

$$+C\_{6}^{3}∙a^{6-3}∙\left(-2b\right)^{3}+C\_{6}^{4}∙a^{6-4}∙\left(-2b\right)^{4}+C\_{6}^{5}∙a^{6-5}∙\left(-2b\right)^{5}+C\_{6}^{6}∙a^{6-6}∙\left(-2b\right)^{6}$$

Для подсчета числа сочетаний воспользуемся треугольником Паскаля, а именно его седьмой строчкой, состоящей из чисел:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| $$C\_{6}^{0}$$ | $$C\_{6}^{1}$$ | $$C\_{6}^{2}$$ | $$C\_{6}^{3}$$ | $$C\_{6}^{4}$$ | $$C\_{6}^{5}$$ | $$C\_{6}^{6}$$ |

Получим:

$$\left(a-2b\right)^{6}=1∙a^{6-0}∙\left(-2b\right)^{0}+6∙a^{6-1}∙\left(-2b\right)^{1}+15∙a^{6-2}∙\left(-2b\right)^{2}+$$

$$+20∙a^{6-3}∙\left(-2b\right)^{3}+15∙a^{6-4}∙\left(-2b\right)^{4}+6∙a^{6-5}∙\left(-2b\right)^{5}+1∙a^{6-6}∙\left(-2b\right)^{6}=$$

$$=1∙a^{6}∙1+6∙a^{5}∙\left(-2b\right)^{}+15∙a^{4}∙\left(-2b\right)^{2}+20∙a^{3}∙\left(-2b\right)^{3}+15∙a^{2}∙\left(-2b\right)^{4}+$$

$$+6∙a^{1}∙\left(-2b\right)^{5}+1∙a^{0}∙\left(-2b\right)^{6}=a^{6}-12a^{5}b+15∙a^{4}·4b^{2}+20∙a^{3}·\left(-8b^{3}\right)+$$

$$+15∙a^{2}·16b^{4}+6a∙\left(-32b^{5}\right)+64b^{6}=a^{6}-12a^{5}b+15∙a^{4}·4b^{2}-20∙a^{3}·8b^{3}+$$

$$+5∙a^{2}·16b^{4}-6a∙32b^{5}+64b^{6}=a^{6}-12a^{5}b+60a^{4}b^{2}-160a^{3}b^{3}+240a^{2}b^{4}-$$

$-192a^{}b^{5}+64b^{6}$.

Получили разложение:

$\left(a-2b\right)^{6}=a^{6}-12a^{5}b+60a^{4}b^{2}-160a^{3}b^{3}+240a^{2}b^{4}-192a^{}b^{5}+64b^{6}$.

в) $\left(1-\sqrt{3}\right)^{5}=C\_{5}^{0}∙1^{5-0}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{0}+C\_{5}^{1}∙1^{5-1}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{1}+C\_{5}^{2}∙1^{5-2}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{2}+$

$$+C\_{5}^{3}∙1^{5-3}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{3}+C\_{5}^{4}∙1^{5-4}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{4}+C\_{5}^{5}∙1^{5-5}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{5}.$$

Для подсчета числа сочетаний воспользуемся треугольником Паскаля, а именно его шестой строчкой, состоящей из чисел:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |
| $$C\_{5}^{0}$$ | $$C\_{5}^{1}$$ | $$C\_{5}^{2}$$ | $$C\_{5}^{3}$$ | $$C\_{5}^{4}$$ | $$C\_{5}^{5}$$ |

Получим:

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^{5}=1∙1^{5-0}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{0}+5∙1^{5-1}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{1}+10∙1^{5-2}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{2}+$$

$$+10∙1^{5-3}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{3}+5∙1^{5-4}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{4}+1∙1^{5-5}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{5}=1∙1^{5}∙1+$$

$$+5∙1^{4}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{}+10∙1^{3}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{2}+10∙1^{2}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{3}+5∙1^{1}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{4}+$$

$$+1∙1^{0}∙\left(-\sqrt{3}\right)^{5}=1+5∙1∙\left(-\sqrt{3}\right)^{}+10∙1∙3+10∙1∙\left(-3\sqrt{3}\right)^{}+5∙1∙9+$$

$+1∙1∙\left(-9\sqrt{3}\right)^{}=1-5\sqrt{3}+30-30\sqrt{3}+45-9\sqrt{3}=76-44\sqrt{3}$.

Получили разложение: $\left(1-\sqrt{3}\right)^{5}=76-44\sqrt{3}$.

г) $\left(3-i\right)^{8}=C\_{8}^{0}∙3^{8-0}∙\left(-i\right)^{0}+C\_{8}^{1}∙3^{8-1}∙\left(-i\right)^{1}+C\_{8}^{2}∙3^{8-2}∙\left(-i\right)^{2}+$

$$+C\_{8}^{3}∙3^{8-3}∙\left(-i\right)^{3}+C\_{8}^{4}∙3^{8-4}∙\left(-i\right)^{4}+C\_{8}^{5}∙3^{8-5}∙\left(-i\right)^{5}+C\_{8}^{6}∙3^{8-6}∙\left(-i\right)^{6}+$$

$+C\_{8}^{7}∙3^{8-7}∙\left(-i\right)^{7}+C\_{8}^{8}∙3^{8-8}∙\left(-i\right)^{8}$.

Для подсчета числа сочетаний воспользуемся треугольником Паскаля, а именно его девятой строчкой, состоящей из чисел:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |
| $$C\_{8}^{0}$$ | $$C\_{8}^{1}$$ | $$C\_{8}^{2}$$ | $$C\_{8}^{3}$$ | $$C\_{8}^{4}$$ | $$C\_{8}^{5}$$ | $$C\_{8}^{6}$$ | $$C\_{8}^{7}$$ | $$C\_{8}^{8}$$ |

Получим:

$$\left(3-i\right)^{8}=1∙3^{8-0}∙\left(-i\right)^{0}+8∙3^{8-1}∙\left(-i\right)^{1}+28∙3^{8-2}∙\left(-i\right)^{2}+$$

$$+56∙3^{8-3}∙\left(-i\right)^{3}+70∙3^{8-4}∙\left(-i\right)^{4}+56∙3^{8-5}∙\left(-i\right)^{5}+28∙3^{8-6}∙\left(-i\right)^{6}+$$

$$+8∙3^{8-7}∙\left(-i\right)^{7}+1∙3^{8-8}∙\left(-i\right)^{8}=1∙3^{8}∙1+8∙3^{7}∙\left(-i\right)^{1}+28∙3^{6}∙\left(-i\right)^{2}+$$

$$+56∙3^{5}∙\left(-i\right)^{3}+70∙3^{4}∙\left(-i\right)^{4}+56∙3^{3}∙\left(-i\right)^{5}+28∙3^{2}∙\left(-i\right)^{6}+$$

$$+8∙3^{1}∙\left(-i\right)^{7}+1∙3^{0}∙\left(-i\right)^{8}=3^{8}-8∙3^{7}∙i+28∙3^{6}∙\left(-1\right)^{}+$$

$$+56∙3^{5}∙i+70∙3^{4}∙1+56∙3^{3}∙\left(-i\right)^{}+28∙3^{2}∙\left(-1\right)^{}+$$

$$+8∙3∙i+1∙1∙1=6561-8∙2187∙i+28∙729∙\left(-1\right)^{}+$$

$$+56∙243∙i+70∙81∙1+56∙27∙\left(-i\right)^{}+28∙9∙\left(-1\right)^{}+$$

$$+24∙i+1=6561-17496i-20412+13608i+5670-1512i-252+24i+1=$$

$=-8432-5376i$.

Получили разложение: $\left(3-i\right)^{8}=-8432-5376i$.

**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант №1****Задание №1.** Сколькими способами можно:а) отобрать 5 различного цвета шариков из 12 шаров, лежащих в ящике;б) сшить трехцветный флаг, имея 11 цветных отрезов ткани;в) переставить 4 первых четных числа;г) выбрать 5 женщин и 7 мужчин из группы, состоящей из 20 человек, среди которых 12 мужчин.**Задание №2.** Разложить по степеням:а) $\left(4+b\right)^{4}$;б) $\left(c+2d\right)^{5}$;в) $\left(1-\sqrt{5}\right)^{6}$;г) $\left(-1+i\right)^{7}$. | **Вариант №2****Задание №1.** Сколькими способами можно:а) отобрать четыре мелка разноцветных или одного цвета из 10 мелков, лежащих в коробке, причем в коробке находится 3 красных, 2 синих, 2 желтых и 3 зеленых мелка;б) составить различные пятизначные телефонные номера без повторяющихся цифр, начиная с цифры 2;в) переставить цифры 1, 3, 5, 7, 9, так, чтобы каждая цифра входила только один раз в любую перестановку;г) выбрать для участия в забеге на дистанцию либо 2 юношей, либо 2 девушек из группы в 18 человек, среди которых 7 девушек.**Задание №2.** Разложить по степеням:а) $\left(7+t\right)^{5}$;б) $\left(a-b\right)^{8}$;в) $\left(3-\sqrt{7}\right)^{7}$;г) $\left(2-i\right)^{6}$. |