Группа 2ИСиП-23

Дисциплина: Математика

Дата: 14.03.24

**Тема: Основы комбинаторики. Перестановка, размещения, сочетание**

**Цель:** познакомить с понятием «комбинаторика»; познакомить с правилами комбинаторики; обеспечить в ходе урока усвоение понятия размещений, перестановок и сочетаний; сформировать умения решать комбинаторные задачи.

**Тип занятия:** лекционное занятие

**Литература:**

1. Параграф 60-70 страницы 317-333 Учебник «Алгебра и начала математического анализа», под редакцией Ш.А. Алимов, Москва, «Просвещение», 2016г, 10-11 класс

(Литература находится внизу на странице дистанционного обучения в скачанных учебниках или источниках)

1. Составить краткий конспект лекции. Ответить на вопросы. (Лекционное занятие прилагается).

**Основные вопросы:**

1. Что такое комбинаторика и какие основные понятия включает в себя этот раздел математики?
2. Каковы основные принципы перестановок, размещений и сочетаний в комбинаторике?
3. Каковы формулы для вычисления числа перестановок, размещений и сочетаний, и как они применяются в практических задачах?
4. В чем заключается различие между перестановками, размещениями и сочетаниями, и какие ситуации требуют использования каждого из этих понятий?
5. Какие примеры задач можно решить с помощью знаний о перестановках, размещениях и сочетаниях, и какие методы применяются для их решения?

**Выполнить:**

1. Составить краткий конспект лекции
2. Выполнить задания самостоятельной работы

Одним из важнейших понятий современной математики является понятие множества. Говорят о множестве учащихся в группе, о множестве букв в алфавите, о множестве изделий в упаковке и т.д.

Понятие множества относится к первоначальным, простейшим, понятиям и формально через другие более простые понятия не определяется. Оно воспринимается конкретно, посредством знакомства с различными примерами множества. Множество характеризуется объединением некоторых однородных объектов в одно целое. Объекты, образующие множество, называются **элементами множества.**

Множество будем записывать, располагая его элементы в фигурных скобка {a, b, c, … , e, f}.

Во множестве порядок элементов роли не играет, так {a, b} = {b, a}.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множествоми обозначается символом ø.

Если каждый элемент множества *А* является элементом множества В, то говорят, что множество *А* является **подмножеством** множества *В*

$$A⊂B$$

Множество {a, b} является подмножеством множества {a, b, c, … , e, f}.

Задача: Перечислите возможные варианты подмножества множества {3, 4, 5, 7, 9}.

При решении многих практических задач часто приходится имеющиеся предметы (элементы) соединять в разные наборы (комбинации). Например - парфюмерные наборы, конфеты, инструменты, спортивные команды. Задачи которые рассматривают такие соединения и находится число различных соединений, называют комбинаторными.

**Комбинаторикой** называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству. В каждой из них требуется подсчитать число возможных вариантов осуществления некоторого действия, ответить на вопрос «сколькими способами». Комбинаторика возникла и развивалась одновременно с теорией вероятностей. И первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр.

Комбинаторика – раздел математики, который занят поисками ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или ином случае, как из всех этих комбинаций выбрать наилучшую. Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова «combinare», что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять». Термин "комбинаторика" был введён знаменитым Готфридом Вильгельмом Лейбницем, - всемирно известным немецким учёным.

Комбинаторика является важным разделом математики, который исследует закономерности расположения, упорядочения, выбора и распределения элементов с фиксированного множества.

При большом числе возможных последствий испытания способы прямого перебора возможных вариантов малоэффективны. На помощь приходят комбинаторные методы, в основе которых лежат два следующих правила называемых соответственно правилами умножения и сложения.

**ПРАВИЛО СУММИРОВАНИЯ**

**Если два взаимоисключающие действия могут быть выполнены в соответствии  и  способами, тогда какое-то одно из этих действий можно выполнить  способами.**

**Пример №1**

Из города А в город В можно добраться 12 поездами, 3 самолетами, 23 автобусами. Сколькими способами можно добраться из города А в город В?

***Решение***. Проезд из А в В на поезде, самолете или автобусе являются событиями, которые не могут выполняться одновременно одним человеком (взаимоисключающими), поэтому общее количество маршрутов можно вычислить суммированием способов передвижения

N=12+13+23=38

**Пример № 2**

В ящике имеется n разноцветных шариков. Произвольным образом вынимаем один шарик. Сколькими способами это можно сделать?

 ***Решение***. Конечно, n способами.

Теперь эти n шариков распределены по двум ящикам: В первом m шариков, во втором k. Произвольно из какого-нибудь ящика вынимаем один шарик. Сколькими разными способами это можно сделать?

 ***Решение***. Из первого ящика шарик можно вытянуть m различными способами, из второго k различными способами, всего N = m + k способами.

**ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ**

**Пусть две выполняемые одно за другим действия могут быть осуществлены в соответствии  и  способами. Тогда обе они могут быть выполнены  способами.**

**Пример № 3**

 В турнире принимают участие 8 хоккейных команд. Сколько существует способов распределить первое, второе и третье места?

***Решение.*** Первое место займет одна из 8 команд, второе - одна из 7, третье - одна из 6, так как каждая из них не может претендовать одновременно на два призовых места. Поэтому таких способов будет ровно

N=8$∙$7$∙$6 =336

**Пример № 4**

Сколько можно записать двузначных чисел в десятичной системе счисления?

***Решение.*** Поскольку число двузначное, то число десятков (m) может принимать одно из девяти значений: 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Число единиц (k) может принимать те же значения и может, кроме того быть равным нулю. Отсюда следует, что m = 9, а k= 10. Всего получим двузначных чисел

N = m ·k = 9·10 =90.

**Пример № 5**

В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола?

 ***Решение.*** По правилу умножения двух девушек можно выбрать 14 ·13 = 182 способами, а двух юношей 6·5 = 30 способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух студентов или студенток. Согласно правилу сложения таких способов выбора будет N =182 + 30 = 212.

**Типы соединений**

Множества элементов называются соединениями.

Различают три типа соединений:

* перестановки из n элементов;
* размещения из n элементов по m;
* сочетания из n элементов по m (m < n).

Перестановки. Число перестановок

На практике часто возникают задачи, связанные с установлением порядка во множестве. Например, число мест равно количеству людей, на которых мы должны разместить их. Такая ситуация встречается часто – рассадить n человек на n мест, или приписать каждому человеку номер. Первый человек может выбрать любое из n мест, второй человек выбирает из (n - 1) оставшихся мест, третий человек может выбрать из уже (n - 2) мест, …, предпоследний человек выбирает из 2 мест, последний человек получает последнее место. Мы получаем произведение всех целых чисел от n до 1.

В общем виде произведение всех целых чисел от 1 до n включительно обозначают

n! = 1·2·3…(n – 2) · (n – 1) · n.

Установленный в конечном множестве порядок называют перестановкой его элементов.

**Определение: Перестановкой из** n **элементов называется любое упорядоченное множество из** n **элементов.**

*Иными словами, это такое множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой – на втором, какой- на третьем, …, какой – на* n-м месте.

Перестановки можно образовывать из элементов любого конечного множества. Число перестановок из n элементов обозначают Рn. Возьмем одноэлементное множество {a}. Ясно, что один элемент можно упорядочить единственным образом, следовательно, Р1 = 1.

Перестановки– это такие соединения по n элементам из данных элементов, которые отличаются одно от другого порядком элементов.

Возьмем двух элементное множество {a, b}. В нем можно установить два порядка: {a, b} или {b, a}. Следовательно, число перестановок из двух элементов Р2 = 2.

Три буквы во множестве {a, b, c} можно расположить, по порядку шестью способами: {a, b, c}{a, c, b}{b, a, c}{b, c, a}{c, b, a}{c, a, b}.

Следовательно, общее число способов упорядочения трех элементов множества

Р3 = 3 · Р2 = 3 · 2 · 1 = 6.

Рn = n · (n - 1) · (n – 2) · … · 2 · 1 = n!

Определение: Пусть n - натуральное число. Через n! (читается "эн факториал") обозначается число, равное произведению всех натуральных чисел 1 от до n:

n! = 1 · 2 · 3 · ... · n.

В случае, если n = 0, по определению полагается: 0! = 1.

**Пример № 6**

Найдем значения следующих выражений:
 1! = 1

2! = 1 · 2 = 2

3! = 1 · 2 · 3 = 6

**Пример № 7**

Чему равно а)Р5 ; б) Р3.

***Решение.***

Рn =  n! =n · (n - 1) · (n – 2) · … · 2 · 1

Р5=5! = 5 · 4 · 3 · 2 ·1 = 120

Р3=3! = 1 · 2 · 3 = 6

**Пример № 8**

Упростите

а) 7! · 8 = 8!

б) 12! · 13 ·14 = 14!

в) κ! · (κ + 1) = (κ + 1)!

**Пример № 9**

Сколькими способами можно расставить 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

 ***Решение.***

n =8

Р8=8! = 8·7·6·5 · 4 · 3 · 2 ·1 =40320

**Размещения.**

Размещениями из m элементов по n элементов ( n ≤ m ) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из m данных разных элементов, и которые отличаются одно от другого **либо самими элементами, либо порядком их расположения.**

**Определение.** **Размещением из** n элементов по ***m* называется любое упорядоченное множество из *m* элементов, состоящее из элементов** n элементного множества.

Число размещений из *m*элементов по *n* обозначают $А\_{m}^{n}$(от французского «arrangement» - «размещение») и вычисляют по формуле:



**Пример № 9**

Учащиеся 11-го класса изучают 9 учебных предметов. В расписании учебных занятий на один день можно поставить 4 различных предмета. Сколько существует различных способов составления расписания на один день?

 ***Решение.***

Имеем 9-элементное множество, элементы которого учебные предметы. При составлении расписания мы будем выбирать 4-элементное подмножество (урока) и устанавливать в нем порядок. Число таких способов равно числу размещений из девяти по четыре, то есть A94:





**Пример № 10**

Сколькими способами из класса, где учатся 24 ученика, можно выбрать старосту и помощника старосты?

***Решение.***

Имеем 24-элементное множество, элементы которого ученики класса. При выборах старосты и помощника старосты мы будем выбирать 2-элементное подмножество (ученика) и устанавливать в нем порядок. Число таких способов равно числу размещений из девяти по четыре(*m=24*, *n=2*), то есть A242:



$$А\_{24}^{2}=\frac{24!}{\left(24-2\right)!}=\frac{24!}{22!}=\frac{24∙23∙22!}{22!}=24∙23=552$$

**Сочетания.**

Сочетаниями из m элементов по n элементов ( n ≤ m ) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из m данных элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

 **Определение. Сочетанием без повторений из** ***n* элементов по *m* -называется любое *m* элементное подмножество *n* -элементного множества**

Число сочетаний из n элементов по m обозначают  (от французского «combination» - «сочетание») и вычисляют по формуле:



**Пример № 11**

Сколькими способами из класса, где учатся 24 ученика, можно выбрать два дежурных ?

***Решение.***



***n*** =24, ***m***=2

$$С\_{24}^{2}=\frac{24!}{2!∙\left(24-2\right)!}=\frac{24!}{2!∙22!}=\frac{24∙23∙22!}{2∙1∙22!}=12∙23=276$$

**Самостоятельная работа**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ задания** | **Задания** | **Буква** | **Ответы** |
|  | $$Р\_{7}=7!=7∙6∙5∙4∙3∙2∙1=5040$$ | **Р** | 5040 |
|  | $$с\_{9}^{8}\frac{9!}{8!∙\left(9-8\right)!}=\frac{9!}{8!∙1!}=\frac{9∙8!}{8!}=9$$ | **Ы** | 9 |
|  | Из 30 обучающихся группы надо выбрать старосту и помощника старосты. Сколькими способами это можно сделать | **Л** | Размещение |
|  | $\frac{12!}{10!}$ =$\frac{12∙11∙10!}{10!}=12∙11=132$ | **О** | 132 |
|  | $А\_{6}^{6}$ =$\frac{6!}{\left(6-6\right)!}=\frac{6!}{0!}=\frac{6∙5∙4∙3∙2∙1}{0!}=720$ (подсказка 0!=1) | **В** | 720 |