**Группа 2ИСиП-22**

**Дата: 25.03.24**

**Тема: «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами»**

**Цель:** получение практических навыков решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами – метод проб, метод хорд и метод касательных

**Предварительная подготовка:** изучить материал параграфов «Отделение корней уравнения», «Метод половинного деления», «Метод хорд» и «Метод касательных» (по конспекту).

Количество часов: 2 часа **Оборудование**: калькулятор.

**Тип занятия:** Лекционное

**Основная литература:**

1. Численные методы и программирование: Учебное пособие / В.Д. Колдаев; Под ред. Л.Г. Гагариной. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2013. - 336 с
2. Гателюк, О. В. Численные методы : учеб. пособие для СПО / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В. Манюкова. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 140 с. — (Серия: Профессиональное образование)

**Основные вопросы:**

1. Какие вам известны методов решений нелинейных уравнений?
2. Какие уравнения называют нелинейными? трансцендентными?
3. Алгоритм метода половинного деления.
4. Алгоритм метода хорд.
5. Алгоритм метод касательных.

этапа

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнения разбивается на два

1. отделение корней
2. уточнение корней до заданной степени точности

Отделить корень – это значит разбить всю ОДЗ на отрезки, в каждом из которых

содержится один корень. Отделение можно произвести двумя способами – графически и аналитически.

Исследование алгебраических уравнений

Число корней у трансцендентных уравнений может быть произвольным, а число корней алгебраического уравнения может быть определен заранее.

Пусть дано алгебраическое уравнение вида

*a xn*  *a xn*1  *a xn*2  ...  *a*  0

1

0

2

*n*

Уравнение считается полным, если все коэффициенты ai не равны 0, т.е. при всех степенях х есть ненулевой коэффициент.

Уравнение считается неполным, если хотя бы один коэффициент при какой-либо степени х равно 0.

Если уравнение полное, то количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов.

Если уравнение неполное, то количество положительных корней считается так же как для полного, а для подсчета количества отрицательных корней необходимо подсчитать перемены знака у соседних коэффициентов при замене х на «-х».

Метод половинного деления (проб)

Алгоритм метода:

* 1. Отрезок [a;b] делим пополам:

*с*  *a*  *b* . Получим два отрезка [a;c] и [c;b] длина

2

которых

*b*  *a*

2

* 1. Если *f* *c*  0 , то с – точный корень уравнения *f* *x*  0    *c* . Если же

*f* *c*  0 , то из двух отрезков [a;c] и [c;b] выберем тот, на концах которого функция принимает значения противоположных знаков. Обозначим этот отрезок *a*1; *b*1 

*f* (*x*)

* 1. Затем отрезок *a*1; *b*1  снова делим пополам на два отрезка и снова производим

действия, что и в п.2.

* 1. На n-ом шаге получим *a* ; *b* 

*f* *a*

\* *f* *b*

  0

длина которого

*bn*  *an*   .

*n n n n* 2

Числа *an*

и *bn*

- корни уравнения

*f* *x*  0 с точностью   за приближенное значение корня

следует взять   *an*  *bn*

2

Если

Метод хорд

*f* *x*\* *f* *x*  0, то корень находится по формуле *x*

 *x* 

*n*

*f* *xn* *b*  *xn* 

*n* 1

*f* *b* *f* *xn* 

Если

*f* *x*\* *f* *x*  0 , то корень находится по формуле *x*

 *x* 

*n*

*f* *xn* *xn*  *a*

*n* 1

Метод касательных

*f* *xn*

  *f* *a*

Если Если

*f* *x*\* *f* *x*  0, то за х0 в формуле принимаем x0=b

*f* *x*\* *f* *x*  0 , то за х0 в формуле принимаем x0=a

*x*  *x*

*n*

 *f* *xn* 

*n* 1

*n f* ' *x* 

Пояснение к работе

Задание А. Отделить корни уравнения и уточнить один из них методом проб с точностью до 0,001.

х4-х3-2х2+3х-3=0

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=4, следовательно, уравнение имеет 4, 2 или 0 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 3, следовательно, положительных корней 3 или 1.

Так как уравнение полное, количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов. Следовательно, 1 отрицательный корень.

1. Отделим корни уравнения.

Полагая f(x)=х4-х3-2х2+3х-3, имеем f’(x)=4х3-3х2-4х+3.

Найдем корни производной: 4х3-3х2-4х+3=0; 4х(х2-1)-3(х2-1)=0; (х2-1)(4х-3)=0; х1=-1; х2=1; х3=3/4.

Следовательно, корни уравнения находятся на отрезках [- ,-1][-1;3/4] [3/4;1]  [1,+ ]. Уменьшим промежутки, в которых находятся корни:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
| f(x) | 78 | 7 | -6 | -3 | -2,0625 | -2 | 3 | 42 |
| Sign f(x) | + | + | - | - | - | - | + | + |

Следовательно, х1[-2;-1]; x2[1;2].

1. Уточним один из корней, например х1[-2;-1], методом проб до сотых долей. Все вычисления удобно производить, используя следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | an+ | bn- | xn= *an*  *bn*  2 | 4 3 2  f(хn)= хn - хn -2 хn +3 хn-3 |
| 0 | -2 | -1 | -1.5 | -3.5625 |
| 1 | -2 | -1.5 | -1.75 | 0.3633 |
| 2 | -1.75 | -1.5 | -1.63 | -1.8140 |
| 3 | -1.75 | -1.63 | -1.69 | -0.7981 |
| 4 | -1.75 | -1.69 | -1.72 | -0.2363 |
| 5 | -1.75 | -1.72 | -1.73 | -0.0406 |
| 6 | -1.75 | -1.73 | -1.74 | 0.1592 |
| 7 | -1.74 | -1.73 |  |  |

Ответ: х1 -1,73

Задание Б. Отделить корни уравнения и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,001. х3-0,2х2+0,5х+1,5=0

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=3, следовательно, уравнение имеет 3 или 1 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 2, следовательно, положительных корней 2 или ни одного.

Так как уравнение полное, количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов. Значит, 1 отрицательный корень.

1. Отделим корни уравнения.

Найдем критические точки, решив уравнение f’(x)=0. D=0.16-6<0, следовательно, критических точек нет. Составим таблицу знаков функции f(x):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
| f(x) | -28,8 | -8,3 | -0,2 | 1,5 | 1,825 | 2,8 | 9,7 | 28,2 |
| Sign f(x) | - | - | - | + | + | + | + | + |

Следовательно, уравнение имеет один единственный корень, лежащий в промежутке [-1;0].

1. Уточним корень уравнения методом хорд.

Для определения формулы определим знак выражения f’(x)\*f’’(x).

f’(x)=3х2-0,4х+0,5>0, f’’(x)=6x-0,4<0, следовательно , f’(x)\*f’’(x)<0. Значит, для вычисления применяем формулу:

*x*  *x*  *f* *xn* *xn*  *a* , где x0=b а=-1; f(a)=f(-1)=-1-0,2-0,5+1,5=-0,2.

*n*

*n*1 *f* *x*   *f* *a*

*n*

Вычисления располагаем в таблицы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | xn | f(xn) =х 3-0,2 х 2+0,5 хn +1,5  n n | xn-a | f(xn)-f(a) | * *f* (*xn* )(*xn*  *a*)   *f* (*xn* )  *f* (*a*) |
| 0 | 0 | 1,5 | 1 | 1,7 | -0,8824 |
| 1 | -0,8824 | 0,2162 | 0,1176 | 0,4162 | -0,0611 |
| 2 | -0,9435 | 0,0105 | 0,0565 | 0,2105 | -0,0028 |
| 3 | -0,9463 | 0,0005 | 0,0537 | 0,2005 | -0,0001 |
| 4 | -0.9464 |  |  |  |  |

Ответ: х -0,946

Задание В. Отделить корни уравнения и уточнить один из них методом касательных с точностью до 0,001 х3-0,2х2+0,5х+1,5=0

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=3, следовательно, уравнение имеет 3 или 1 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 2, следовательно, положительных корней 2 или ни одного.

Так как уравнение полное, количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов. Значит, 1 отрицательный корень.

1. Отделим корни уравнения.

Полагая f(x)=х3-0,2х2+0,5х+1,5, имеем f’(x)=3х2-0,4х+0,5.

Найдем критические точки, решив уравнение f’(x)=0. D=0.16-6<0, следовательно, критических точек нет. Составим таблицу знаков функции f(x):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
| f(x) | -28,8 | -8,3 | -0,2 | 1,5 | 1,825 | 2,8 | 9,7 | 28,2 |
| Sign f(x) | - | - | - | + | + | + | + | + |

Следовательно, уравнение имеет один единственный корень, лежащий в промежутке [-1;0].

1. Уточним корень уравнения методом касательных.

Для определения формулы определим знак выражения f’(x)\*f’’(x).

f’(x)=3х2-0,4х+0,5>0, f’’(x)=6x-0,4<0, следовательно , f’(x)\*f’’(x)<0. Значит, для вычисления применяем формулу:

Для вычисления применяем формулу

*x*  *x*

* *f* (*xn* )

, где x0=a

Для вычисления используем таблицу:

*n*1

*n f* (*x* )

*n*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | xn | f(xn)= х 3-0,2 х 2+0,5 хn +1,5  n n | *f*  (xn)=3хn2-0,4хn+0,5 | * *f* (*xn* )   *f* (*xn* ) |
| 0 | -1 | -0.2 | 3.9 | 0.051 |
| 1 | -0.949 | -0.0093 | 3.5814 | 0.0026 |
| 2 | -0.9464 | -0.0004 | 3.5657 | 0.00001 |

Ответ: х -0,946.