**СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ**

**Тип занятия**: лекция.

**Основные вопросы**:

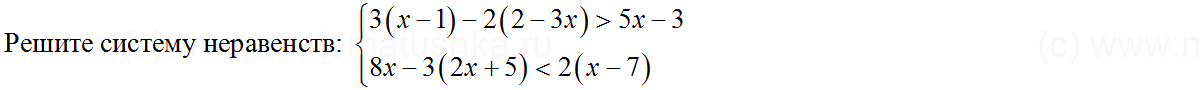
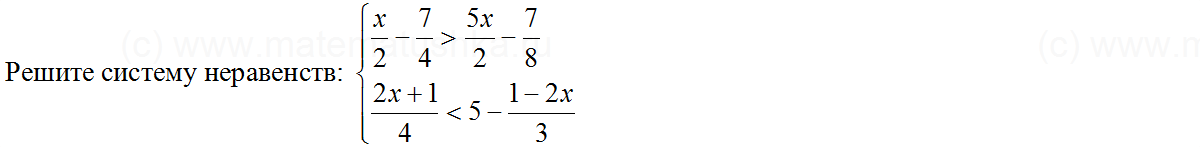
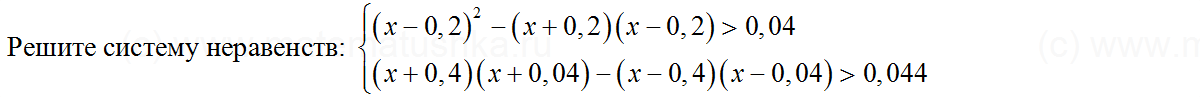
1. Понятие системы неравенств.
2. Решение систем неравенств.
3. Двойные неравенства.
4. Совокупность неравенств.

**Литература**:

Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. «Алгебра и начала анализа», 2014.

**Домашнее задание**:

1. Изучить материал лекции, приведенный ниже.
2. Решить системы неравенств:

Так же, как и уравнения, неравенства можно объединять в систему.

Если требуется найти все общие решения двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо решить **систему неравенств**.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой.

Например, запись \left\{\begin{matrix}2x-1>3 \\3x-2<11\end{matrix}\right. означает, что неравенства 2x-1>3 и 3x-2<11 образуют **систему линейных неравенств с одной переменной**. Надо найти те x, которые являются решениями и первого, и второго неравенства.

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется**решением системы неравенств с одной переменной**.

Например, числа 3 и 4 являются решениями системы \left\{\begin{matrix}2x-1>3 \\3x-2<11\end{matrix}\right., а число 0 не является её решением.

Некоторые системы неравенств можно записать в виде двойного неравенства. Например, систему \left\{\begin{matrix}2x+1>3 \\2x+1<5\end{matrix}\right. можно записать так: 3<2x+1<5.

И наоборот, любое двойное неравенство можно записать в виде системы неравенств.

Например, двойное неравенство -4\leqslant3x-2\leqslant6 можно записать в виде системы неравенств:

\left\{\begin{matrix}3x-2\leqslant6 \\3x-2\geqslant -4\end{matrix}\right..

**Решить систему неравенств** означает найти все её решения или доказать, что решений нет.

Если система решений не имеет, то множество её решений является пустым.

**Алгоритм решения систему неравенств с одной переменной:**

1) решаем каждое неравенство отдельно;

2) отмечаем множества решений каждого неравенства на одной координатной прямой;

3) находим пересечение решений всех неравенств, входящих в систему, и записать ответ.

**Пример 1.** Решите систему неравенств: \left\{\begin{matrix}3x+6\geqslant 0 \\x-5<0\end{matrix}\right..

Выберите правильный ответ из предложенных вариантов.

1) [-2;5]; 2) [5; +∞); 3) [-2;5); 4) (-∞; 5).

Решение:

Упростим каждое неравенство системы:

\left\{\begin{matrix}3x+6\geqslant 0 \\x-5<0\end{matrix}\right. \Leftrightarrow  \left\{\begin{matrix}3x\geqslant -6 \\x<5\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x\geqslant -2 \\x<5\end{matrix}\right.

Отметим на координатной прямой точки -2 и 5. Точка -2 будет закрашенной, т.к. первое неравенство нестрогое, точка 5 будет пустой, т.к. второе неравенство строгое. Отметим штриховкой решения неравенств.

По рисунку видно, что их пересечением будет интервал [-2;5). Пустой точке соответствует круглая скобка, закрашенной точке соответствует квадратная.

Интервал [-2;5) соответствует варианту 3.

Ответ: 3.

**Пример 2.** Решите систему неравенств: \left\{\begin{matrix}5x+2>3x-1 \\3x+1>7x-4\end{matrix}\right.

Выберите правильный ответ из предложенных вариантов.

1) (1,25; 1,5); 2) (1,5; +∞); 3) (-1,25;1,5); 4) (-1,5; 1,25).

Решение:

Упростим каждое неравенство системы. Получим:

\left\{\begin{matrix}x>-1,5 \\x<1,25\end{matrix}\right.

Отметим точки 1,25 и -1,5 на координатной прямой. Обе точки пустые, так как оба неравенства строгие. Отметим штриховкой множества решений первого и второго неравенств на одной координатной прямой.

Пересечением этих множеств является интервал (-1,5; 1,25). Пустым точкам соответствуют круглые скобки.

Ответ: 4.

**Пример 3.** Найдите множество решений двойного неравенства -2\leqslant  \frac{3x+7}{4}\leqslant  4.

Выберите правильный ответ из предложенных вариантов.

1) [-5; -3]; 2) [3; 5]; 2) [-3; 5]; 4) [-5; 3].

Решение:

1 способ. От двойного неравенства перейдем к системе неравенств:

\left\{\begin{matrix}\frac{3x+7}{4}\leqslant 4 \\\frac{3x+7}{4}\geqslant-2\end{matrix}\right.

Умножим каждое неравенство на 4, получим: \left\{\begin{matrix}3x+7\leqslant  16 \\3x+7\geqslant-8\end{matrix}\right., отсюда: \left\{\begin{matrix}3x\leqslant  9 \\3x\geqslant-15\end{matrix}\right., и далее \left\{\begin{matrix}x\leqslant  3 \\x\geqslant-5\end{matrix}\right.

Отметим решения неравенств на координатной прямой. Решение системы - отрезок [-5; 3].  
Ответ 4.

2 способ. Выполним равносильные преобразования двойного неравенства:

-2\leqslant  \frac{3x+7}{4}\leqslant  4 \Leftrightarrow  -2\cdot 4\leqslant  \frac{3x+7}{4}\cdot 4\leqslant  4\cdot 4 \Leftrightarrow  -8\leqslant  3x+7\leqslant  16 \Leftrightarrow  

\Leftrightarrow   -8-7\leqslant  3x+7-7\leqslant  16-7 \Leftrightarrow   -15\leqslant  3x\leqslant  9 \Leftrightarrow  -5\leqslant  x\leqslant  3

Отметим на числовой прямой все значения x, которые удовлетворяют этому условию. Точки -5 и 3 будут закрашенными, так как неравенство нестрогое.

Множеством решений двойного неравенства является отрезок [-5; 3] – вариант под номером 4.

Ответ: 4.

**Пример 4.** Найдите наибольшее значение x, удовлетворяющее системе неравенств: \left\{\begin{matrix}8x+16\leqslant0 \\2-2x<13\end{matrix}\right.

Решение:

Выразим из каждого неравенства переменную x. Не забываем, что при делении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства не меняется, при делении на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

\left\{\begin{matrix}x\leqslant-2 \\x>-5,5\end{matrix}\right.

Используем числовую прямую. При этом точка -2 будет закрашенной, т.к. знак первого неравенства нестрогий, а точка -5,5 будет выколотой, т.к. знак второго неравенства строгий. Покажем на числовой прямой штриховкой решения первого и второго неравенств:

Решением системы неравенств является тот промежуток, на котором пересекаются две штриховки. Это промежуток (-5,5;-2]. Выколотой точке соответствует круглая скобка, закрашенной - квадратная.

Ответим на вопрос задачи. Наибольшее значение на этом промежутке.

Ответ: -2.

**Пример 5.** Найдите количество целочисленных решений неравенства 5x+4>2x-5, удовлетворяющих условию 4x-2\leqslant3.

Решение:

Условия 5x+4>2x-5 и 4x-2\leqslant3 должны выполняться одновременно. Значит, эти неравенства надо объединить в систему: \left\{\begin{matrix}5x+4>2x-5 \\4x-2\leqslant3\end{matrix}\right.

Упростим каждое неравенство системы:

\left\{\begin{matrix}5x+4>2x-5 \\4x-2\leqslant3\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}3x>-9 \\4x\leqslant5\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x>-3 \\x\leqslant1,25\end{matrix}\right.

Отметим на координатной прямой решение каждого неравенства штриховкой. Точка 1,25 будет закрашенной, точка -3 – пустой.

По рисунку видно, что пересечением обозначенных множеств является интервал (-3; 1,25]. При этом точка 1,25 входит в указанный интервал, а точка -3 исключается из него. Найдем все целые числа, принадлежащие интервалу (-3; 1,25]. Это: -2, -1,0 и 1. Всего их 4.

Ответ: 4.