**Группа 1ИСиП-22**

**Дисциплина: Численные методы**

**Дата: 02.03.24**

**Тема: «Метод Гаусса. Метод итераций решения СЛАУ»**

**Цель:** обучение студентов основам линейной алгебры и численных методов, а также дать им навыки для решения практических задач, связанных с линейной алгеброй и системами линейных уравнений.

**Оборудования:** учебное пособие, конспект лекции

**Тип занятия:** лекция

**Основная литература:**

1. Численные методы и программирование: Учебное пособие / В.Д. Колдаев; Под ред. Л.Г. Гагариной. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2013. - 336 с
2. Гателюк, О. В. Численные методы : учеб. пособие для СПО / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В. Манюкова. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 140 с. — (Серия: Профессиональное образование)

**Основные вопросы:**

1. Какие основные этапы включает в себя метод Гаусса для решения систем линейных уравнений?
2. Почему приведение матрицы к верхнетреугольному виду упрощает решение системы линейных уравнений?
3. Какой численный метод используется для приближенного решения систем линейных уравнений, если размерность системы очень велика?
4. Что такое итерационный процесс в контексте метода итераций решения СЛАУ?
5. Какие примеры практического применения метода итераций вы можете привести?

**Выполненная работа должна содержать:**

1. Законспектировать лекцию
2. Письменно ответить на вопросы

**Понятие системы линейных уравнений.**

**Определение 1.** ***Системой линейных уравнений***, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида



где числа aij – называются коэффициентами системы, числа bij – свободными членами.

**Определение 2.** Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

**Определение 3.** Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

В последенем случае каждое решение системы называется частным решением системы. Совокупность всех частных решений называется общим решением.

***Решить систему*** – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если совместна, найти ее общее решение.

**Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.**

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:



Матрица А = , составленная из коэффициентов при неизвестных хi (i = 1,2,…n), называется ***матрицей системы***.

Матрица B = ,

составленная из коэффициентов при неизвестных и свободных членов, называется ***расширенной матрицей***.

**Определение 4.** Матрица А называется ***матрицей треугольного вида***, если все ее элементы выше (ниже) главной диагонали равны нулю.

Например, А =  или В =  - матрицы треугольного вида.

Метод Гаусса удобно использовать при решении систем с большим количеством уравнений. Этот метод заключается в последоваетльном исключении неизвестных. Систему линейных уравнений приводят к системе с треугольной матрицей с помощью эквивалентных преобразований. Затем из полученной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок.

***К эквивалентным преобразованиям относят следующие****:*

* умножение и деление коэффициентов и свободных членов на одно и тоже число, отличное от нуля.
* Сложение и вычитание уравнений.
* Перестановка уравнений.
* Исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты равны нулю.

**Пример 1**

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:



Выпишем расширенную матрицу системы:



Для упрощения вычислений поменяем первую и вторую строки местами:



Умножим первую строку на –3 и сложим ее со второй строкой. Первую строку умножим на –4 и сложим с третьей сторокой, получим эквивалентную матрицу:



Умножим вторую строку на –1:



Умножим вторую строку на 5 и сложим с третьей строкой:



Разделим третью строку на –11:



Получили матрицу треугольного вида (все элементы ниже главной диагонали равны нулю). Выпишем систему уравнений треугольного вида:

Ответ: х = -1, у = 3, z = 2

**ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается проблема решения систем линейных алгебраических уравнений

(СЛАУ), записываемых в виде

 *a*11

 *a*1*n*   *x*1 

 *b*1 

     

*Ax*  *b*

или

 ⁝ ⋱

⁝  

⁝   

⁝  ,

*an*1

 *ann*   *xn* 

*bn* 

     

где

*A*  (*ai j* )  *Rn**n* – действительная матрица размеров (*n*  *n*), *i*, *j*

– переменные, соот-

ветствующие номерам строк и столбцов (целые числа);

*b*  (*b*1 ,...,*bn* )*T*

 *Rn* – вектор-

столбец размеров

(*n*  1) ,

*x*  (*x*1,..., *xn* )*T*

 *Rn* – вектор-столбец неизвестных,

*Rn* – *n* -

мерное евклидово пространство, верхний индекс "*T* "

транспонирования.

здесь и далее обозначает операцию

Требуется найти решение

*x*  (*x*1,..., *x**n* )*T*

 *Rn*

системы, подстановка которого

в систему приводит к верному равенству

# З а м е ч а н и я.

*A x*

 *b* .

* 1. Из курса линейной алгебры известно, что решение задачи существует и единст-

венно, если определитель (детерминант) матрицы *A* отличен от нуля, т.е. det *A*  *A*  0

( *A* – невырожденная матрица, называемая также неособенной).

## Классификация численных методов решения СЛАУ

При решении СЛАУ используются два класса численных методов:

1. *Прямые методы*, позволяющие найти решение за определенное число операций. К прямым методам относятся: метод Гаусса и его модификации (в том числе метод про- гонки), метод *LU* – разложения и др. Изучаются в курсе линейной алгебры.
2. *Итерационные методы,* основанные на использовании повторяющегося (цикли- ческого) процесса и позволяющие получить решение в результате последовательных приближений. Операции, входящие в повторяющийся процесс, составляют *итерацию*. К итерационным методам относятся: метод простых итераций, метод Зейделя и др.

# ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

**А. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ**

Альтернативой прямым методам являются итерационные методы, основанные на

многократном уточнении

*x* (0)

– приближенно заданного решения задачи

*A x*  *b* . Верх-

ним индексом в скобках здесь и далее по тексту обозначается номер итерации (совокуп-

ности повторяющихся действий).

## Методика решения задачи

*Шаг* 1. Исходная задача

*A x*  *b*

преобразуется к равносильному виду:

*x*   *x*  ,

где

  *ij* 

– квадратная матрица,   *i*  – вектор, *i*, *j*  1,..., *n* . Это преобразование

может быть выполнено различными путями, но для обеспечения сходимости итераций

(см. процедуру 2) нужно добиться, чтобы Понятие нормы вводится ниже.)

  1 (чтобы норма 

была меньше единицы.

*Шаг* 2. Вектор 

принимается в качестве начального приближения

*x* (0)  

и да-

лее многократно выполняются действия по уточнению решения согласно рекуррентному соотношению

*x* (*k* 1)  *x* (*k* )  ,

*k*  0,1,...

или в развернутом виде

*x* (*k* 1)

 11 *x* (*k* )  

*x* (*k*)  ...  

*x* (*k*)   ,

1 1 12 2

1*n n* 1

(*k* 1) 2

*x*

 21

*x* (*k*)  22

*x* (*k*)  ...  2*n*

*x* (*k*)  2 ,

⁝

1

2

*n*

(*k* 1)

*x*

*n*

 *n*1

*x* (*k*)  *n*2

1

*x* (*k*)  ...   *nn*

2

*x* (*k*)  *n* .

*n*

*Шаг* 3. Итерации прерываются при выполнении условия

*x* (*k* 1)  *x* (*k* )

  ,

где   0 – заданная точность, которую необходимо достигнуть при решении задачи.

# З а м е ч а н и я.

1. Процесс называется *параллельным итерированием*, так как для вычисления

(*k*  1)-го приближения всех неизвестных учитываются вычисленные ранее их ближения.

*k* -е при-

1. Начальное приближение

*x* (0) может выбираться произвольно, или из некоторых

соображений, например

*x* (0)

  . При этом может использоваться априорная информа-

ция о решении или просто «грубая» прикидка.

## Нормы матриц и векторов

Наиболее употребительными являются следующие формулы для вычисления зна- чений норм матриц и векторов, образованных действительными компонентами.

## Нормы матрицы A Нормы вектора x

*n*

1. *A*
2.  max 

*aij* ;

 max

1

*x*

*xi* ;

1. *j* 1 *i*
2. *A*

*n*

1.  max 

*aij* ;

*n*

*x* 2   *xi* ;

1. *i* 1

*i* 1

3)  ; 

 

*n n*

*a*

2

*ij*

*i* 1 *j* 1



*i* 1

*n*

*x*

2

*i*

*A*

*x*

.

3 3

## Скорость сходимости

Рассмотрим последовательность *x* (*k*) , сходящуюся к

*x* . Предположим, что все

ее элементы различны и ни один из них не совпадает с

*x* . Наиболее эффективный спо-

соб оценивания скорости сходимости состоит в сопоставлении расстояния между

*x* (*k* 1)

и *x* с расстоянием между

*x* (*k* ) и

*x* .

Последовательность *x* (*k*)

симальное число, для которого

называется *сходящейся с порядком*

*p* , если

*p* – мак-

0  lim

*k* 

*x* (*k* )  *x*

*x* (*k* 1)  *x*

*p*

  .

Поскольку величина

*p* определяется предельными свойствами

*x* (*k*) , она назы-

вается *асимптотической скоростью сходимости*.

Если последовательность *x* (*k*) – сходящаяся с порядком

*p* , то число

*c*  lim

*x* (*k* 1)  *x*

*k* 

*x* (*k*)  *x*

*p*

называется *асимптотическим параметром ошибки*.

Если

*p*  1 , *c*  1 , то сходимость *линейная*, если

*p*  2

* *квадратичная*, если

*p*  3

* *кубичная* и т.д. Если

*p*  1

или

*p*  1, *c*  0 , то сходимость *сверхлинейная*. Линейная

сходимость является синонимом сходимости со скоростью геометрической прогрессии. Сверхлинейная сходимость является более быстрой, чем определяемая любой геометри- ческой прогрессией.

## Теоремы о сходимости

**Теорема** (о достаточном условии сходимости метода простых итераций). *Метод простых итераций, реализующийся в процессе последовательных приближений*, *сходит-*

*ся к единственному решению исходной системы*

*Ax*  *b*

*при любом начальном прибли-*

*жении*

*s*

*x* (0)

*со скоростью не медленнее геометрической прогрессии, если какая-либо*

*норма матрицы*  *меньше единицы, т.е.*

# З а м е ч а н и я*.*

  1 ( *s*  {1,2,3 } )*.*

1. Сходящийся процесс обладает свойством *самоисправляемости*, т.е. отдельная ошибка в промежуточных вычислениях не отразится на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новое начальное.
2. Условия сходимости выполняются, если в матрице *A* диагональные элементы преобладают, т.е.

*aii*

 *ai*1

 ... 

*ai*,*i* 1

* *ai*,*i* 1

 ... 

*ain* ,

*i*  1,..., *n* ,

и хотя бы для одного *i* неравенство строгое. Иначе, модули диагональных коэффициен- тов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициен- тов (свободные члены не рассматриваются).

1. Чем меньше величина нормы  , тем быстрее сходимость метода.

## Способы преобразования системы

Преобразование системы

*Ax*  *b*

к виду

*x*  *x*  

с матрицей

 , удовлетворяю-

щей условиям сходимости, может быть выполнено несколькими способами. Приведем способы, используемые наиболее часто.

1. Уравнения, входящие в систему *Ax*  *b* , переставляются так, чтобы выполня-

лось условие преобладания диагональных элементов (для той же цели можно использо- вать другие элементарные преобразования). Затем первое уравнение разрешается относи-

тельно

*x*1 , второе – относительно *x*2

и т.д. При этом получается матрица 

с нулевыми

диагональными элементами.

Например, система

 2,8*x*1  *x*2  4*x*3

10*x*1  *x*2  8*x*3

 *x*1  2*x*2  0,6*x*3

 60 ,

 10 ,

 20

с помощью перестановки уравнений приводится к виду

10*x*1  *x*2  8*x*3

 10 ,

 *x*1  2*x*2  0,6*x*3

 2,8*x*1  *x*2  4*x*3

 20 ,

 60 ,

где

10 

 1  8 ,

2   1 

 0,6 ,

4   2,8

* 1 , т.е. диагональные элементы преоб-

ладают.

Выражая систему

*x*1 из первого уравнения, *x*2

* из второго, а

*x*3 – из третьего, получаем

*x*1  0  *x*1  0,1*x*2  0,8*x*3  1,

 0 0,1

*x*2

*x*3

 0,8

 0,5*x*1  0  *x*2  0,3*x*3  10 ,

 0,7*x*1  0,25*x*2  0  *x*3  15 ,

 1 

   

где

   0,5

0,7

0

 0,25

0,3  ,

0 

  10  .

15

   

но.

1

Заметим, что

  max 0,9 ; 0,8 ; 0,95   0,95  1 , т.е. условие теоремы выполне-

Проиллюстрируем применение других элементарных преобразований. Так, систе-

ма

4*x*1  *x*2  9*x*3 3*x*1  8*x*2  7*x*3

  7 ,

  6 ,

*x*1  *x*2  8*x*3  7

путем сложения первого и третьего уравнений и вычитания из второго уравнения третье- го уравнения преобразуется к виду

5*x*1  2*x*2  *x*3 2*x*1  7*x*2  *x*3 *x*1  *x*2  8*x*3

с преобладанием диагональных элементов.

 0 ,

 13 ,

 7

1. Уравнения преобразуются так, чтобы выполнялось условие преобладания диаго-

нальных элементов, но при этом коэффициенты *ii*

Например, систему

не обязательно равнялись нулю.

можно записать в форме

1,02 *x*1  0,15 *x*2

0,8 *x*1  1,05 *x*2

 2,7 ,

 4

*x*1   0,02 *x*1  0,15 *x*2  2,7 ,

*x*2   0,8 *x*1  0,05 *x*2  4 ,

для которой

  max 0,17 ; 0,85   0,85  1.

1. Если det *A*  0 , систему *Ax*  *b* следует умножить на матрицу *D*  *A* 1   , где

1

*ij* 

* матрица с малыми по модулю элементами. Тогда получается система

(*A* 1  )*Ax*  *D b*

или

*A* 1*A x*  *A x*  *D b* , которую можно записать в форме

*x*  *x*   , где

   *A* ,

  *D b* . Если

*ij* ,

*i*, *j*  1,..., *n* , достаточно малы, условие

сходимости выполняется.

**Б. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ**

Этот метод является модификацией метода простых итераций и в некоторых слу- чаях приводит к более быстрой сходимости.

Итерации по методу Зейделя отличаются от простых итераций тем, что при нахо-

ждении

*i* -й компоненты

(*k*  1)-го приближения сразу используются уже найденные

компоненты (*k*  1)-го приближения с меньшими номерами 1,2,...,*i*  1 . При рассмотре-

нии развернутой формы системы итерационный процесс записывается в виде

*x* (*k* 1)   *x* (*k* )  

*x* (*k* )  



*x* (*k* 1)

2

*x* (*k* )  ...

 1 *x* (*k* )   ,

1 11 1

12 2

13 3

*n n* 1

(*k* 1)

*x*

2

 21

*x* (*k* 1)  22

*x* (*k* )  23

*x* (*k* )  ...

 2*n*

*x* (*k* )  2,

(1.1)

*x* (*k* 1)

1

2

3

*n*

 31 *x* (*k* 1)  32 *x* (*k* 1)  33 *x* (*k* )  ...

 3

*x* (*k* )  3,

3

⁝

(*k* 1)

*x*

*n*

 *n*1

1 2 3

*x* (*k* 1)  *n*2  



*n*3

*x*

(*k* 1)

3

1

*n n*

 ...  



*nn* 1

*x*

(*k* 1)

*n* 1

 *nn*

*x* (*k* )  *n* .

*n*

В каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, получен- ных из предыдущих уравнений, что показано в записи стрелками.

## Теорема о сходимости

**Теорема** (о достаточном условии сходимости метода Зейделя).

*Если для системы*

*x*  *x*  

*какая-либо норма матрицы* 

*меньше единицы,*

*т.е.*   ( *s*  {1,2,3 } ), *то процесс последовательных приближений сходится к*

1

*s*

*единственному решению исходной системы*

*x* (0) *.*

*Ax*  *b*

*при любом начальном приближении*

Записывая (1.1) в матричной форме, получаем

*x* (*k* 1)

 *Lx* (*k* 1)  *Ux* (*k* )   , (1.2)

где *L*,*U* являются разложениями матрицы  :

 0 0

0  0 

11 12

13

 1*n* 





 21 0



0  0 



22





0 

*U*

0

0

23



 2*n* 



*L*  31







32

0  0 ,

 33

 3*n*  .

  

  

      

*n*1 *n*2



0





0

0

0





*n*3  

 *nn* 

Преобразуя (1.2) к виду процесса метода Зейделя:

*x*  *x*   , получаем матричную форму итерационного

*x* (*k* 1)   *E*  *L*1 *U x* (*k* )   *E*  *L*1 . (1.3)

# З а м е ч а н и я.

1. Для обеспечения сходимости метода Зейделя требуется преобразовать систему

*Ax*  *b*

к виду

*x*  *x*  

с преобладанием диагональных элементов в матрице  (см.

метод простых итераций). Например, в системе

2*x*1  *x*2

 2 ,

*x*1  2*x*2

диагональные элементы преобладают, так как

 2

2  1 ,

 2  1.

Соотношения метода Зейделя (1.1) принимают вид

*x* (*k* )

(*k* 1) 1

*x*

(*k* 1) 2

*x*

  2  1,

2

*x* (*k* 1)

  1  1.

2

Выберем в качестве начального приближения

*x* (0)

*x* (0)

 (0 ; 0)*T*

(рис.1,*а*). Тогда

(1)

*x*

*x*

1

  2  1  1 . Так как при этом

2

(0)

2

 0 , то вычислению

(1)

1

*x*

соответствует дви-

жение по горизонтали до пересечения с прямой, описываемой первым уравнением. Далее

(1)

*x*

2

*x* (1)

  1  1 

2

1. . Вычислению

2

(1)

2

*x*

соответствует движение по вертикали до пересече-

ния с прямой, описываемой вторым уравнением. Продолжая вычисления, получаем

(2)

*x*

1

*x* (1) 3

  2  1  

2 4

 1  1 ,

4

(2)

2

*x*

*x* (2)

  1  1 

2

 1  1  9

8 8

и т.д. В результате имеем

процесс, *сходящийся* к точке

*x*   2 ;

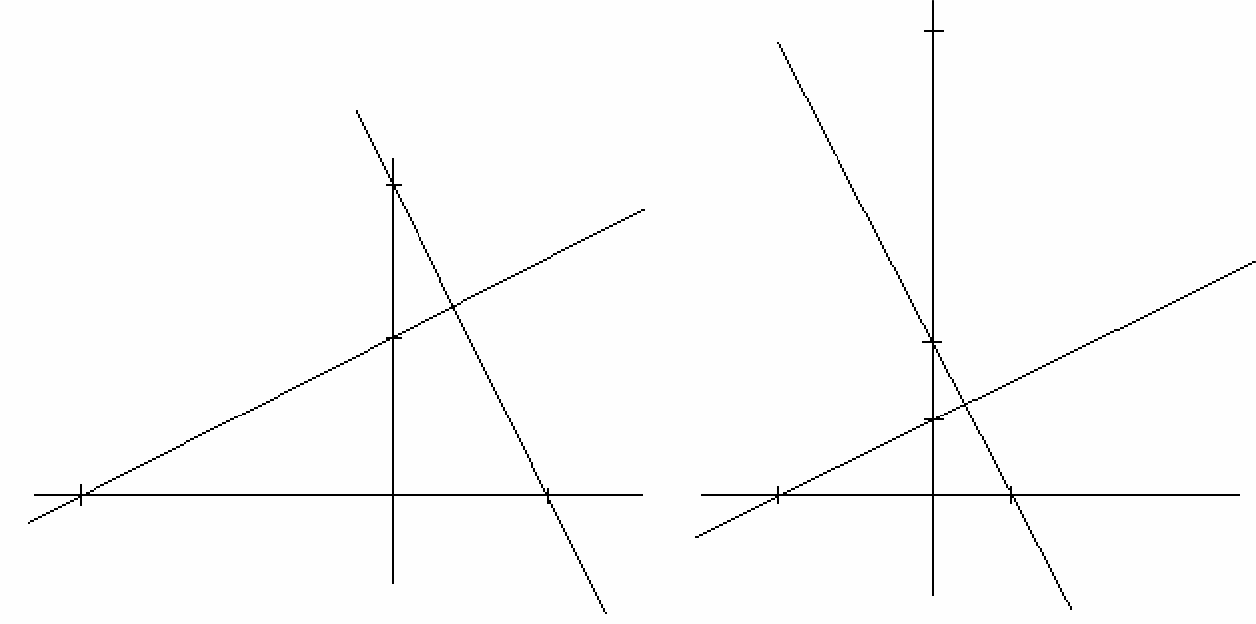
 5



6 *T*

 .

5 



*x*2

2*x*1  *x*2  2

*x*2

6

2

*x*1  2*x*2  2

1

2

*x*1  2*x*2  2

*x* (0)

0

1

 2

1

*x*1

 2

0

*x* (0)

*x*1

2*x*1  *x*2  2

*а б*

Рис. 1

Переставим уравнения в системе:

*x*1  2*x*2 2*x*1  *x*2

 2 ,

 2 .

В полученной системе диагональные элементы не преобладают. Уравнения метода Зейделя имеют вид

(*k* 1) 1

*x*

(*k* 1) 2

*x*

 2*x* (*k*)  2 ,

 2*x* (*k* 1)  2 .

2

1

При

*x* (0)

 (0 ; 0)*T*

получаем

(1)

1

*x*

 2 ,

(1)

2

*x*

 6

и т.д. В результате имеем *рас-*

*ходящийся процесс* (рис. 1,*б*).

1. Условие преобладания диагональных элементов является достаточным для схо- димости, но не является необходимым.
2. Процесс (1.1) называется *последовательным итерированием*, так как на каждой итерации полученные из предыдущих уравнений значения подставляются в последую- щие. Как правило, метод Зейделя обеспечивает лучшую сходимость, чем метод простых итераций (за счет накопления информации). Метод Зейделя может сходиться, если расхо- дится метод простых итераций, и наоборот.
3. При расчетах на компьютере удобнее пользоваться формулой (1.3).
4. Преимуществом метода Зейделя, как и метода простых итераций, является его

*самоисправляемость*.

1. Метод Зейделя имеет преимущества перед методом простых итераций, так как он всегда сходится для *нормальных* систем линейных алгебраических уравнений, т.е. та- ких систем, в которых матрица *A* является симметрической и положительно определен- ной. Систему линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей *A* всегда

можно преобразовать к нормальной, если ее умножить слева на матрицу *AT* . Таким об-

разом, система *AT Ax*  *AT b* является нормальной, а матрица *AT A* - симметрической.