**Группа 1ИСиП-22**

**Дата: 15.03.24**

**Тема: «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами»**

**Цель:** получение практических навыков решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами – метод проб, метод хорд и метод касательных

**Предварительная подготовка:** изучить материал параграфов «Отделение корней уравнения», «Метод половинного деления», «Метод хорд» и «Метод касательных» (по конспекту).

Количество часов: 2 часа **Оборудование**: калькулятор.

**Тип занятия:** практическое

**Основная литература:**

1. Численные методы и программирование: Учебное пособие / В.Д. Колдаев; Под ред. Л.Г. Гагариной. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2013. - 336 с
2. Гателюк, О. В. Численные методы : учеб. пособие для СПО / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В. Манюкова. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 140 с. — (Серия: Профессиональное образование)

**Основные вопросы:**

1. Какие вам известны методов решений нелинейных уравнений?
2. Какие уравнения называют нелинейными? трансцендентными?
3. Алгоритм метода половинного деления.
4. Алгоритм метода хорд.
5. Алгоритм метод касательных.

**Выполненная работа должна содержать:**

1. Название, цель и задание работы.
2. Подробное решение задания.
3. Ответ, содержащий обоснование полученных результатов и выводов.

этапа

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнения разбивается на два

1. отделение корней
2. уточнение корней до заданной степени точности

Отделить корень – это значит разбить всю ОДЗ на отрезки, в каждом из которых

содержится один корень. Отделение можно произвести двумя способами – графически и аналитически.

Исследование алгебраических уравнений

Число корней у трансцендентных уравнений может быть произвольным, а число корней алгебраического уравнения может быть определен заранее.

Пусть дано алгебраическое уравнение вида

*a xn*  *a xn*1  *a xn*2  ...  *a*  0

1

0

2

*n*

Уравнение считается полным, если все коэффициенты ai не равны 0, т.е. при всех степенях х есть ненулевой коэффициент.

Уравнение считается неполным, если хотя бы один коэффициент при какой-либо степени х равно 0.

Если уравнение полное, то количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов.

Если уравнение неполное, то количество положительных корней считается так же как для полного, а для подсчета количества отрицательных корней необходимо подсчитать перемены знака у соседних коэффициентов при замене х на «-х».

Метод половинного деления (проб)

Алгоритм метода:

* 1. Отрезок [a;b] делим пополам:

*с*  *a*  *b* . Получим два отрезка [a;c] и [c;b] длина

2

которых

*b*  *a*

2

* 1. Если *f* *c*  0 , то с – точный корень уравнения *f* *x*  0    *c* . Если же

*f* *c*  0 , то из двух отрезков [a;c] и [c;b] выберем тот, на концах которого функция принимает значения противоположных знаков. Обозначим этот отрезок *a*1; *b*1 

*f* (*x*)

* 1. Затем отрезок *a*1; *b*1  снова делим пополам на два отрезка и снова производим

действия, что и в п.2.

* 1. На n-ом шаге получим *a* ; *b* 

*f* *a*

\* *f* *b*

  0

длина которого

*bn*  *an*   .

*n n n n* 2

Числа *an*

и *bn*

- корни уравнения

*f* *x*  0 с точностью   за приближенное значение корня

следует взять   *an*  *bn*

2

Если

Метод хорд

*f* *x*\* *f* *x*  0, то корень находится по формуле *x*

 *x* 

*n*

*f* *xn* *b*  *xn* 

*n* 1

*f* *b* *f* *xn* 

Если

*f* *x*\* *f* *x*  0 , то корень находится по формуле *x*

 *x* 

*n*

*f* *xn* *xn*  *a*

*n* 1

Метод касательных

*f* *xn*

  *f* *a*

Если Если

*f* *x*\* *f* *x*  0, то за х0 в формуле принимаем x0=b

*f* *x*\* *f* *x*  0 , то за х0 в формуле принимаем x0=a

*x*  *x*

*n*

 *f* *xn* 

*n* 1

*n f* ' *x* 

Пояснение к работе

Задание А. Отделить корни уравнения и уточнить один из них методом проб с точностью до 0,001.

х4-х3-2х2+3х-3=0

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=4, следовательно, уравнение имеет 4, 2 или 0 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 3, следовательно, положительных корней 3 или 1.

Так как уравнение полное, количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов. Следовательно, 1 отрицательный корень.

1. Отделим корни уравнения.

Полагая f(x)=х4-х3-2х2+3х-3, имеем f’(x)=4х3-3х2-4х+3.

Найдем корни производной: 4х3-3х2-4х+3=0; 4х(х2-1)-3(х2-1)=0; (х2-1)(4х-3)=0; х1=-1; х2=1; х3=3/4.

Следовательно, корни уравнения находятся на отрезках [- ,-1][-1;3/4] [3/4;1]  [1,+ ]. Уменьшим промежутки, в которых находятся корни:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
| f(x) | 78 | 7 | -6 | -3 | -2,0625 | -2 | 3 | 42 |
| Sign f(x) | + | + | - | - | - | - | + | + |

Следовательно, х1[-2;-1]; x2[1;2].

1. Уточним один из корней, например х1[-2;-1], методом проб до сотых долей. Все вычисления удобно производить, используя следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | an+ | bn- | xn= *an*  *bn*  2 | 4 3 2  f(хn)= хn - хn -2 хn +3 хn-3 |
| 0 | -2 | -1 | -1.5 | -3.5625 |
| 1 | -2 | -1.5 | -1.75 | 0.3633 |
| 2 | -1.75 | -1.5 | -1.63 | -1.8140 |
| 3 | -1.75 | -1.63 | -1.69 | -0.7981 |
| 4 | -1.75 | -1.69 | -1.72 | -0.2363 |
| 5 | -1.75 | -1.72 | -1.73 | -0.0406 |
| 6 | -1.75 | -1.73 | -1.74 | 0.1592 |
| 7 | -1.74 | -1.73 |  |  |

Ответ: х1 -1,73

Задание Б. Отделить корни уравнения и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,001. х3-0,2х2+0,5х+1,5=0

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=3, следовательно, уравнение имеет 3 или 1 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 2, следовательно, положительных корней 2 или ни одного.

Так как уравнение полное, количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов. Значит, 1 отрицательный корень.

1. Отделим корни уравнения.

Найдем критические точки, решив уравнение f’(x)=0. D=0.16-6<0, следовательно, критических точек нет. Составим таблицу знаков функции f(x):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
| f(x) | -28,8 | -8,3 | -0,2 | 1,5 | 1,825 | 2,8 | 9,7 | 28,2 |
| Sign f(x) | - | - | - | + | + | + | + | + |

Следовательно, уравнение имеет один единственный корень, лежащий в промежутке [-1;0].

1. Уточним корень уравнения методом хорд.

Для определения формулы определим знак выражения f’(x)\*f’’(x).

f’(x)=3х2-0,4х+0,5>0, f’’(x)=6x-0,4<0, следовательно , f’(x)\*f’’(x)<0. Значит, для вычисления применяем формулу:

*x*  *x*  *f* *xn* *xn*  *a* , где x0=b а=-1; f(a)=f(-1)=-1-0,2-0,5+1,5=-0,2.

*n*

*n*1 *f* *x*   *f* *a*

*n*

Вычисления располагаем в таблицы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | xn | f(xn) =х 3-0,2 х 2+0,5 хn +1,5  n n | xn-a | f(xn)-f(a) | * *f* (*xn* )(*xn*  *a*)   *f* (*xn* )  *f* (*a*) |
| 0 | 0 | 1,5 | 1 | 1,7 | -0,8824 |
| 1 | -0,8824 | 0,2162 | 0,1176 | 0,4162 | -0,0611 |
| 2 | -0,9435 | 0,0105 | 0,0565 | 0,2105 | -0,0028 |
| 3 | -0,9463 | 0,0005 | 0,0537 | 0,2005 | -0,0001 |
| 4 | -0.9464 |  |  |  |  |

Ответ: х -0,946

Задание В. Отделить корни уравнения и уточнить один из них методом касательных с точностью до 0,001 х3-0,2х2+0,5х+1,5=0

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=3, следовательно, уравнение имеет 3 или 1 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 2, следовательно, положительных корней 2 или ни одного.

Так как уравнение полное, количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов. Значит, 1 отрицательный корень.

1. Отделим корни уравнения.

Полагая f(x)=х3-0,2х2+0,5х+1,5, имеем f’(x)=3х2-0,4х+0,5.

Найдем критические точки, решив уравнение f’(x)=0. D=0.16-6<0, следовательно, критических точек нет. Составим таблицу знаков функции f(x):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
| f(x) | -28,8 | -8,3 | -0,2 | 1,5 | 1,825 | 2,8 | 9,7 | 28,2 |
| Sign f(x) | - | - | - | + | + | + | + | + |

Следовательно, уравнение имеет один единственный корень, лежащий в промежутке [-1;0].

1. Уточним корень уравнения методом касательных.

Для определения формулы определим знак выражения f’(x)\*f’’(x).

f’(x)=3х2-0,4х+0,5>0, f’’(x)=6x-0,4<0, следовательно , f’(x)\*f’’(x)<0. Значит, для вычисления применяем формулу:

Для вычисления применяем формулу

*x*  *x*

* *f* (*xn* )

, где x0=a

Для вычисления используем таблицу:

*n*1

*n f* (*x* )

*n*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | xn | f(xn)= х 3-0,2 х 2+0,5 хn +1,5  n n | *f*  (xn)=3хn2-0,4хn+0,5 | * *f* (*xn* )   *f* (*xn* ) |
| 0 | -1 | -0.2 | 3.9 | 0.051 |
| 1 | -0.949 | -0.0093 | 3.5814 | 0.0026 |
| 2 | -0.9464 | -0.0004 | 3.5657 | 0.00001 |

Ответ: х -0,946.

Задание по вариантам (по номеру в журнале)

Отделить корни уравнения и уточнить один из них с точностью до 0,001

А) методом проб Б) методом хорд В) методом касательных

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| П/п | Задание А | Задание Б | Задание В |
| 1. | 3х4+4х3-12х-5=0 | х3+3х2+9х-8=0 | х3+0,1х2+0,4х-1,2=0 |
| 2. | 2х3-9х2-60х+1=0 | х3-6х-8=0 | х3-0,2х2+0,5х+1,4=0 |
| 3. | х4-х-1=0 | х3-3х2+6х+3=0 | х3+х-3=0 |
| 4. | 2х4-х2-10=0 | х3-0,1х2+0,4х-1,5=0 | х3+0,4х2+0,6х-1,6=0 |
| 5. | 3х4+8х3+6х2-10=0 | х3-3х2+9х+2=0 | х3-0,2х2+0,4х-1,4=0 |
| 6. | х4-18х2+6=0 | х3+х-5=0 | х3+3х2+12х+3=0 |
| 7. | х4+4х3-8х2-17=0 | х3+0,2х2+0,5х-1,2=0 | х3-0,2х2+0,5х-1=0 |
| 8. | х4-х3-2х2+3х-3=0 | х3+3х+1=0 | х3-0,1х2+0,4х+1,2=0 |
| 9. | 3х4+4х3-12х2+1=0 | х3+0,2х2+0,5х-2=0 | х3-3х2+6х-5=0 |
| 10. | 3х4-8х3-18х2+2=0 | х3-3х2+12х-9=0 | х3-02х2+0,5х-1,4=0 |
| 11. | 2х4-8х3+8х2-1=0 | х3-0,2х2+0,3х-1,2=0 | х3-2х+4=0 |
| 12. | 2х4+8х3+8х2-1=0 | х3-3х2+6х-2=0 | х3-0,2х2+0,3х+1,2=0 |
| 13. | х4-4х3-8х2+1=0 | х3-0,1х2+0,4х-1,5=0 | х3-3х2+12х-12=0 |
| 14. | 3х4+4х3-12х2-5=0 | х3+3х2+6х-1=0 | х3+0,2х2+0,5х+0,8=0 |
| 15. | 2х3-9х2-60х+1=0 | х3+0,1х2+0,4х-1,2=0 | х3+4х-6=0 |
| 16. | х4-х-1=0 | х3+4х-6=0 | х3+0,1х2+0,4х-1,2=0 |
| 17. | 2х4-х2-10=0 | х3+0,2х2+0,5х+0,8=0 | х3+3х2+6х-1=0 |
| 18. | 3х4+8х3+6х2-10=0 | х3-3х2+12х-12=0 | х3-0,1х2+0,4х-1,5=0 |
| 19. | х4-18х2+6=0 | х3-0,2х2+0,3х+1,2=0 | х3-3х2+6х-2=0 |
| 20. | х4+4х3-8х2-17=0 | х3-2х+4=0 | х3-0,2х2+0,3х-1,2=0 |
| 21. | х4-х3-2х2+3х-3=0 | х3-02х2+0,5х-1,4=0 | х3-3х2+12х-9=0 |
| 22. | 3х4+4х3-12х2+1=0 | х3-3х2+6х-5=0 | х3+0,2х2+0,5х-2=0 |
| 23. | 3х4-8х3-18х2+2=0 | х3-0,1х2+0,4х+1,2=0 | х3+3х+1=0 |
| 24. | 3х4+4х3-12х2-5=0 | х3-0,2х2+0,5х-1=0 | х3+0,2х2+0,5х-1,2=0 |
| 25. | 2х3-9х2-60х+1=0 | х3+3х2+12х+3=0 | х3+х-5=0 |
| 26. | х4-х-1=0 | х3-0,2х2+0,4х-1,4=0 | х3-3х2+9х+2=0 |
| 27. | 2х4-х2-10=0 | х3+0,4х2+0,6х-1,6=0 | х3-0,1х2+0,4х-1,5=0 |
| 28. | 3х4+8х3+6х2-10=0 | х3+х-3=0 | х3-3х2+6х+3=0 |
| 29. | х4-18х2+6=0 | х3-0,2х2+0,5х+1,4=0 | х3-6х-8=0 |
| 30. | 3х4+4х3-12х2+1=0 | 2х3-9х2-60х+1=0 | х3+3х2+9х-8=0 |