Урок №144: Вычисление площадей при помощи интеграла (урок 2)

План

Вычисление площадей по заданным условиям

Домашнее задание Выполнить №1015 с.308

**Пример 10**
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями .

И **первый важнейший этап** **решения**состоит как раз в**построении чертежа**. При этом я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все прямые (если они есть) и только **потом** – параболы, гиперболы, графики других функций.

В нашей задаче: прямая  определяет ось , прямые  параллельны оси  и парабола  симметрична относительно оси , для неё находим несколько опорных точек:


Искомую фигуру желательно штриховать:


**Второй этап** состоит в том, чтобы **правильно составить** и **правильно вычислить** определённый интеграл. На отрезке   график функции  расположен **над осью **, поэтому искомая площадь:


**Ответ**:****

**После того, как задание выполнено, полезно взглянуть на чертёж
и прикинуть, реалистичный ли получился ответ.**

И мы «на глазок» подсчитываем количество заштрихованных клеточек – ну, примерно 9 наберётся, похоже на правду. Совершенно понятно, что если бы у нас получилось, скажем, 20 квадратных единиц, то, очевидно, где-то допущена ошибка – в построенную фигуру 20 клеток явно не вмещается, от силы десяток. Если ответ получился отрицательным, то задание тоже решено некорректно.

**Пример 11**
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  и осью ****

Быстренько разминаемся (обязательно!) и рассматриваем «зеркальную» ситуацию – когда криволинейная трапеция расположена **под осью :**

**Пример 12**
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями ,  и координатными осями.

**Решение**: найдём несколько опорных точек для построения экспоненты:

и выполним чертёж, получая фигуру площадью около двух клеток:

Если криволинейная трапеция расположена **не выше**оси ****, то её площадь можно найти по формуле: .
В данном случае: 

**Ответ**:  – ну что же, очень и очень похоже на правду.

На практике чаще всего фигура расположена и в верхней и в нижней полуплоскости, а поэтому от простейших школьных задачек мы переходим к более содержательным примерам:

**Пример 13**
Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями , .

**Решение**: сначала нужно выполнить чертеж, при этом нас особо интересуют точки пересечения параболы  и прямой , поскольку здесь будут находиться пределы интегрирования.  Найти их можно двумя способами. Первый способ – аналитический. Составим и решим уравнение:

таким образом:


**Достоинство** аналитического способа состоит в его **точности**, а **недостаток** – в **длительности** (и в этом примере нам ещё повезло). Поэтому во многих задачах бывает выгоднее построить линии поточечно, при этом пределы интегрирования выясняются как бы «сами собой».

С прямой  всё понятно, а вот для построения параболы удобно найти её вершину, для этого возьмём производную и приравняем её к нулю:
 – именно в этой точке и будет находиться вершина. И, в силу симметрии параболы, остальные опорные точки найдём по принципу «влево-вправо»:


Выполним чертеж:


**А теперь рабочая формула:** если на отрезке  некоторая непрерывная функция  **больше либо равна** непрерывной функции , то площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и отрезками прямых , можно найти по формуле:


Здесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, а, грубо говоря, **важно, какой из двух графиков ВЫШЕ**.

В нашем примере очевидно, что на отрезке  парабола располагается выше прямой, а поэтому из  нужно вычесть 

Завершение решения может выглядеть так:

На отрезке : , по соответствующей формуле:


**Ответ**:****

Следует отметить, что простые формулы, рассмотренные в начале параграфа – это частные случаи формулы . Поскольку ось  задаётся уравнением , то одна из функций будет нулевой, и в зависимости от того, выше или ниже лежит криволинейная трапеция, мы получим формулу  либо 

А сейчас пара типовых задач для самостоятельного решения

**Пример 14**
Найти площадь фигур, ограниченных линиями:

а) , .

б) , , 

Решение с чертежами и краткими комментариями в конце книги

В ходе решения рассматриваемой задачи иногда случается забавный казус. Чертеж выполнен правильно, интеграл решён правильно, но по невнимательности… **найдена площадь не той фигуры**, именно так несколько раз ошибался ваш покорный слуга. Вот реальный случай из жизни:

**Пример 15**
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями 

**Решение**: выполним бесхитростный чертёж,

хитрость которого состоит в том, что **искомая площадь заштрихована зелёным цветом** (внимательно смотрИте на условие – чем ограничена фигура!). Но на практике по невнимательности нередко возникает «глюк», что нужно найти площадь фигуры, которая заштрихована серым цветом! Особое коварство состоит в том, что прямую  можно недочертить до оси , и тогда мы вовсе не увидим нужную фигуру.

Этот пример ещё и полезен тем, что в нём площадь фигуры считается с помощью двух определённых интегралов. Действительно:

1) на отрезке  над осью  расположен график прямой ;
2) на отрезке  над осью  расположен график гиперболы .

Совершенно понятно, что площади можно (и нужно) сложить:


**Ответ**:****