Урок №144: Вычисление площадей при помощи интеграла (урок 2)

План

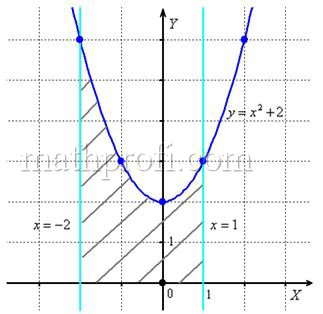
Вычисление площадей по заданным условиям

Домашнее задание Выполнить №1015 с.308

**Пример 10**  
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image002.gif.

И **первый важнейший этап** **решения**состоит как раз в**построении чертежа**. При этом я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все прямые (если они есть) и только **потом** – параболы, гиперболы, графики других функций.

В нашей задаче: прямая https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image004.gif определяет ось https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006.gif, прямые https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image008.gif параллельны оси https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image010.gif и парабола https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image012.gif симметрична относительно оси https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image010_0000.gif, для неё находим несколько опорных точек:  
https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image015.jpg

Искомую фигуру желательно штриховать:  


**Второй этап** состоит в том, чтобы **правильно составить** и **правильно вычислить** определённый интеграл. На отрезке https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image019.gif  график функции https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image021.gif расположен **над осью https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006_0000.gif**, поэтому искомая площадь:  
https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image024.gif

**Ответ**:**https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image026.gif**

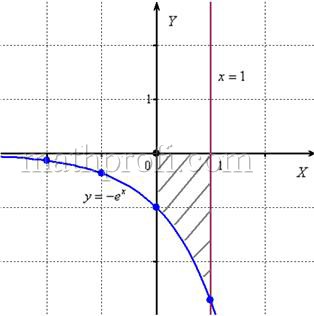
**После того, как задание выполнено, полезно взглянуть на чертёж  
и прикинуть, реалистичный ли получился ответ.**

И мы «на глазок» подсчитываем количество заштрихованных клеточек – ну, примерно 9 наберётся, похоже на правду. Совершенно понятно, что если бы у нас получилось, скажем, 20 квадратных единиц, то, очевидно, где-то допущена ошибка – в построенную фигуру 20 клеток явно не вмещается, от силы десяток. Если ответ получился отрицательным, то задание тоже решено некорректно.

**Пример 11**  
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image028.gif и осью **https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006_0001.gif**

Быстренько разминаемся (обязательно!) и рассматриваем «зеркальную» ситуацию – когда криволинейная трапеция расположена **под осью https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006_0002.gif:**

**Пример 12**  
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image031.gif, https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image033.gif и координатными осями.

**Решение**: найдём несколько опорных точек для построения экспоненты:  
https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image035.jpg  
и выполним чертёж, получая фигуру площадью около двух клеток:  
  
Если криволинейная трапеция расположена **не выше**оси **https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006_0003.gif**, то её площадь можно найти по формуле: https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image039.gif.  
В данном случае: https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image041.gif

**Ответ**: https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image043.gif – ну что же, очень и очень похоже на правду.

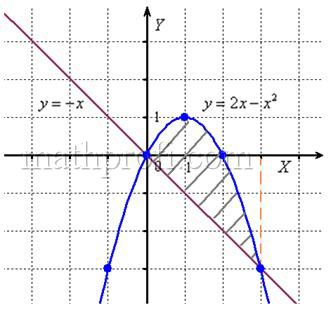
На практике чаще всего фигура расположена и в верхней и в нижней полуплоскости, а поэтому от простейших школьных задачек мы переходим к более содержательным примерам:

**Пример 13**  
Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image045.gif, https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image047.gif.

**Решение**: сначала нужно выполнить чертеж, при этом нас особо интересуют точки пересечения параболы https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image045_0000.gif и прямой https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image047_0000.gif, поскольку здесь будут находиться пределы интегрирования.  Найти их можно двумя способами. Первый способ – аналитический. Составим и решим уравнение:  
  
таким образом:  
https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image053.gif

**Достоинство** аналитического способа состоит в его **точности**, а **недостаток** – в **длительности** (и в этом примере нам ещё повезло). Поэтому во многих задачах бывает выгоднее построить линии поточечно, при этом пределы интегрирования выясняются как бы «сами собой».

С прямой https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image047_0001.gif всё понятно, а вот для построения параболы удобно найти её вершину, для этого возьмём производную и приравняем её к нулю:  
https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image055.gif – именно в этой точке и будет находиться вершина. И, в силу симметрии параболы, остальные опорные точки найдём по принципу «влево-вправо»:  
https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image057.jpg

Выполним чертеж:  


**А теперь рабочая формула:** если на отрезке https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image061.gif некоторая непрерывная функция https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image063.gif **больше либо равна** непрерывной функции https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image065.gif, то площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и отрезками прямых https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image067.gif, можно найти по формуле:  
https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image069.gif

Здесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, а, грубо говоря, **важно, какой из двух графиков ВЫШЕ**.

В нашем примере очевидно, что на отрезке https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image071.gif парабола располагается выше прямой, а поэтому из https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image073.gif нужно вычесть https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image075.gif

Завершение решения может выглядеть так:

На отрезке https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image077.gif: https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image079.gif, по соответствующей формуле:  
https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image081.gif

**Ответ**:**https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image083.gif**

Следует отметить, что простые формулы, рассмотренные в начале параграфа – это частные случаи формулы https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image085.gif. Поскольку ось https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006_0004.gif задаётся уравнением https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image088.gif, то одна из функций будет нулевой, и в зависимости от того, выше или ниже лежит криволинейная трапеция, мы получим формулу https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image090.gif либо https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image092.gif

А сейчас пара типовых задач для самостоятельного решения

**Пример 14**  
Найти площадь фигур, ограниченных линиями:

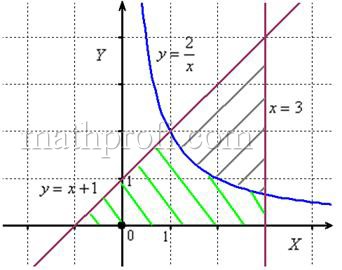
а) https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image094.gif, https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image096.gif.

б) https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image098.gif, https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image100.gif, https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image102.gif

Решение с чертежами и краткими комментариями в конце книги

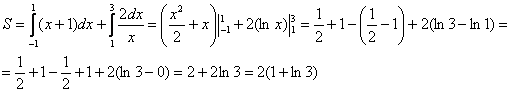
В ходе решения рассматриваемой задачи иногда случается забавный казус. Чертеж выполнен правильно, интеграл решён правильно, но по невнимательности… **найдена площадь не той фигуры**, именно так несколько раз ошибался ваш покорный слуга. Вот реальный случай из жизни:

**Пример 15**  
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image104.gif

**Решение**: выполним бесхитростный чертёж,  
  
хитрость которого состоит в том, что **искомая площадь заштрихована зелёным цветом** (внимательно смотрИте на условие – чем ограничена фигура!). Но на практике по невнимательности нередко возникает «глюк», что нужно найти площадь фигуры, которая заштрихована серым цветом! Особое коварство состоит в том, что прямую https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image108.gif можно недочертить до оси https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006_0005.gif, и тогда мы вовсе не увидим нужную фигуру.

Этот пример ещё и полезен тем, что в нём площадь фигуры считается с помощью двух определённых интегралов. Действительно:

1) на отрезке https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image111.gif над осью https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006_0006.gif расположен график прямой https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image114.gif;  
2) на отрезке https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image116.gif над осью https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006_0007.gif расположен график гиперболы https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image118.gif.

Совершенно понятно, что площади можно (и нужно) сложить:  


**Ответ**:**https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image122.gif**