**Группа 2ИСиП-22**

**Дата:17.02.24**

**Тема:** Полная вероятность. Вероятность гипотез. Формулы Байеса. Условная вероятность. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

**Тип занятия:** Лекционное занятие

**Литература:**

1. § 2-3 стр. 50-53. § 1-3 стр. 55-59 Учебник Теория вероятности и математическая статистика, учеб. Пособие для вузов, «Высшая школа», 2003 г. Москва

2. Учебник Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистики, учеб. Пособие для вузов, «Высшая школа», 2003 г. Москва

(Литература находится внизу на странице дистанционного обучения в скачанных учебниках или источниках)

3. Лекционное занятие прилагается

**Основные вопросы:**

1. Составить краткий конспект лекции по данной теме.
2. Полная вероятность. Вероятность гипотез.
3. Формулы Байеса.
4. Условная вероятность. Повторение испытаний.
5. Формула Бернулли.
6. Локальная и интегральная теоремы Лапласа
7. Выполнить на стр. 53 № 1,2; на стр. 63 № 1, 2. (Учебник Гмурман В.Е. Теория Вероятностей и математическая статистика.)

**Посмотреть видео:** <https://vk.com/video-94745149_172166167>

<https://youtu.be/OgIQNDsBL8s>

<https://youtu.be/3bzXyXmzPP0>

<https://youtu.be/L2X5eXaVlso>

**Тема:** Полная вероятность. Вероятность гипотез. Формулы Байеса. Условная вероятность. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

**Тип занятия:** Лекционное занятие

**Формула полной вероятности**

Формула полной вероятности является следствием обеих основных теорем теории вероятностей. Пусть требуется найти вероятность неко-торого события *A* , которое может произойти вместе с одним из собы-тий *H*1 , *H*2 , …, *H* *n* , образующих полную группу несовместных собы-

тий. События *H*1 , *H*2 , …, *Hn* называются ***гипотезами***.

ТЕОРЕМА. Вероятность события *A* равна сумме произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события *A* при этой гипотезе:

*P*( *A*)= *P* ( *H*1)⋅ *P*( *A*| *H*1) + *P* ( *H* 2)⋅ *P*( *A*| *H* 2) +…+ *P* ( *H n* )⋅ *P*( *A*| *H n* ) =

*n*

* ∑ *P*(*Hi* ) ⋅ *P*( *A*| *Hi* ) .
  1. =1

Последняя формула называется ***формулой полной вероятности***. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как гипотезы *H*1 , *H* 2 , …, *H* *n* образуют

полную группу событий, то событие *A* может произойти только одно-временно с одной из этих гипотез:

1. = *H*1 ⋅ *A* + *H* 2 ⋅ *A* + ... + *H* *n* ⋅ *A* .

Так как гипотезы *H*1 , *H* 2 , …, *H* *n* несовместны, то и события *H*1 ⋅ *A* , *H* 2⋅ *A* , ... , *H n* ⋅ *A* несовместны.Применяя к последнему равенству тео-рему сложения, получаем:

*n*

*P* ( *A* ) = *P* ( *H*1⋅ *A* ) + *P* ( *H* 2⋅ *A* ) + ... + *P* ( *H n* ⋅ *A* ) =∑ *P*(*Hi* ⋅ *A*) .

*i* =1

Применяя к событию *Hi* ⋅ *A* теорему умножения, получим:

*n*

*P*( *A*) =∑ *P*(*Hi* )⋅ *P*( *A*| *Hi* ) .

1. =1

Теорема доказана.

ПРИМЕР. Имеются три одинаковые на вид урны. В первой урне 2 белых и один черный шар, во второй урне 3 белых и один черный шар, в третьей урне 2 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наугад урну и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Рассмотрим гипотезы:

*H*1= <выбор первой урны>;

*H* 2= <выбор второй урны>;

*H*3= <выбор третьей урны>

и событие *A* = < появление белого шара >.

По условию задачи гипотезы равновозможны, поэтому:

*P* ( *H*1) = *P* ( *H* 2) = *P* ( *H*3) =.

Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответст-венно:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P*( *A*| *H*1) = |  | 2 | ; | |  |  | *P*( *A*| *H* 2) = | | | | | | |  | 3 | ; | |  |  | *P*( *A*| *H*3) = | | | | | 1 | . |  |
| 3 | |  | 4 | |  | 2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| По формуле полной вероятности | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *P*( *A*) | = | |  | 1 |  | ⋅ |  | 2 | + | 1 | ⋅ | 3 |  | + | |  | 1 |  | ⋅ |  | 1 | = | 23 | . |  |  |  |
| 3 | | | 3 | |  | 4 |  | 3 | | | 2 | | 36 |  |  |  |
|  |  |  |  | 3 | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Теорема гипотез или формула Байеса**

Теорема гипотез или формула Байеса является следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности.

Пусть имеется полная группы несовместных гипотез *H*1 , *H* 2 , …, *H n* .Вероятности этих гипотез до опыта известны и раны соответствен-но *P* ( *H*1 ), *P* ( *H* 2 ), …, *P* ( *H* *n* ). Произведен опыт, в результате которого

произошло событие *A* . Как изменятся вероятности гипотез с появлени-ем события *A* ?

Речь идет о том, чтобы найти условную вероятность *P* ( *Hi* | *A* ) для каждой гипотезы. По теореме умножения имеем:

*P* ( *A* ⋅ *Hi* ) = *P*( *A*)⋅ *P* ( *Hi* | *A* ) = *P* ( *Hi* )⋅ *P*( *A*| *Hi* ) , *i* = 1, 2, …, *n* ,

или

*P*( *A*)⋅ *P* ( *Hi* | *A* ) = *P* ( *Hi* )⋅ *P*( *A*| *Hi* ) , *i* = 1, 2, …, *n* ,

откуда

*P* ( *H* | *A* ) = *P*(*Hi* )⋅ *P*( *A*| *Hi* ), *i* = 1, 2, …, *n* .

*i* *P*( *A*)

Последняя формула называется ***формулой Байеса*** или ***теоремой*** ***гипотез***.Вероятность*P*(*A*)в ней вычисляется по формуле полной

вероятности.

ПРИМЕР. Прибор может собираться из высококачественных дета-лей и из деталей обычного качества . Около 40% приборов собирается из высококачественных деталей . Если прибор собран из высококачествен-ных деталей, его надежность (вероятность безотказной работы) за время

1. равна 0,95; если из деталей обычного качества − его надежность равна

0,7. Прибор испытывался в течение времени *t* и работал безотказно.

Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

Решение. Возможны две гипотезы:

*H*1= <прибор собран из высококачественных деталей>;

*H*2= <прибор собран из деталей обычного качества>.

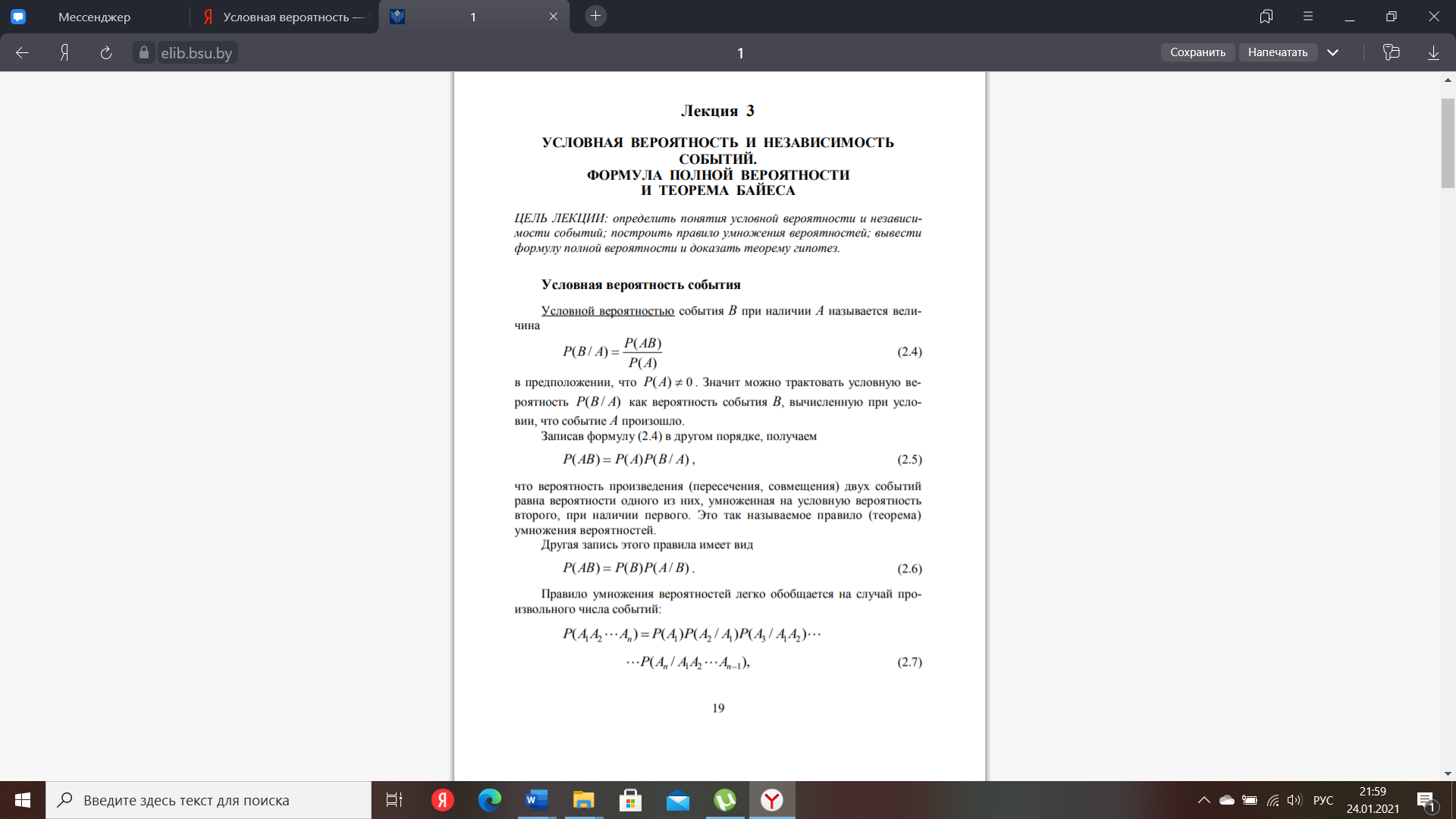
Вероятности этих гипотез до опыта: *P* ( *H*1 ) = 0,4; *P* ( *H*2 ) = 0,6. В результате опыта произошло событие

1. = <прибор безотказно работал в течение времени *t* >. Условные вероятности этого события при гипотезах *H*1 и *H*2 рав-

ны: *P*( *A*| *H*1 ) = 0,95; *P*( *A*| *H*2 ) = 0,7. По формуле Байеса находим веро-ятность гипотезы *H*1 после опыта:

0,4 ⋅ 0,95

*P* ( *H*1 ) =  0,4 ⋅ 0,95 + 0,6 ⋅ 0,7 = 0,475.



**Примеры решенных задач**

**Задача 1.**

В корзине яблоки с четырех деревьев одного сорта. С первого – 15% всех яблок, со второго – 35%, с третьего – 20%, с четвертого – 30%. Созревшие яблоки составляют соответственно 99%, 97%, 98%, 95%.  
     а) Какова вероятность того, что наугад взятое яблоко окажется спелым (событие *А*).  
     б) При условии, что наугад взятое яблоко оказалось спелым, вычислить вероятность того, что оно с первого дерева.  
     **Решение**.

а) Имеем 4 гипотезы:  
     B1 – наугад взятое яблоко снято с 1-го дерева;  
     B2 – наугад взятое яблоко снято с 2-го дерева;  
     B3 – наугад взятое яблоко снято с 3-го дерева;  
     B4 – наугад взятое яблоко снято с 4-го дерева.  
     Их вероятности по условию: *Р(B*1) = 0,15; *Р(B*2) = 0,35; *Р(B*3) = 0,2; *Р(B*4) = 0,3.  
     Условные вероятности события *А*:  
     *Р(А*/*B*1) = 0,99; *Р(А*/*B*2) = 0,97; *Р(А*/*B*3) = 0,98; *Р(А*/*B*4) = 0,95.  
     Вероятность того, что наудачу взятое яблоко окажется спелым, находится по формуле полной вероятности:  
     *Р(А*)=*Р(B*1)∙*Р(А*/*B*1)+*Р(B*2)∙*Р(А*/*B*2)+*Р(B*3)∙*Р(А*/*B*3)+*Р(B*4)∙*Р(А*/*B*4)=0,969.

     б) Формула Байеса для нашего случая имеет вид:  
     http://math.immf.ru/img/688.gif.  
     **Задача 2.**

В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).  
     **Решение**. Обозначим через *А* событие – извлечен белый шар. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: *B1* – белых шаров нет, *В2* – один белый шар, *В3* – два белых шара.  
     Поскольку всего имеется три гипотезы, и сумма вероятностей гипотез равна 1 (так как они образуют полную группу событий), то вероятность каждой из гипотез равна 1/3,т.е.   
     *P(B*1) = *P(B*2)*= P(B*3) = 1/3.  
**Условная вероятность того**, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне не было белых шаров, *Р(А*/*B*1)=1/3. Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне был один белый шар, *Р(А*/*B*2)=2/3. Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне было два белых шара *Р(А*/*B*3)=3/ 3=1.  
     Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар, находим по формуле полной вероятности: 

*Р*(*А*)=*Р(B*1)∙*Р(А*/*B*1)+*Р(B*2)∙*Р(А*/*B*2)+*Р(B*3)∙*Р(А*/*B*3)=1/3·1/3+1/3·2/3+1/3·1=2/3*.*

**Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа**

